

Asymptotiques de nombres de Betti d'hypersurfaces projectives réelles

F. Bihan

ABSTRACT. On s'intéresse à la valeur maximale des nombres de Betti $b_i(\mathbb{R}X_m^n)$ pour i, m, n fixés où $\mathbb{R}X_m^n$ est la partie réelle d'une hypersurface réelle X_m^n non singulière de degré m dans l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$, ainsi qu'à la valeur maximale des nombres de Betti $b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n)$ pour i, k, n fixés où $\mathbb{R}Y_{2k}^n$ est la partie réelle d'un revêtement double réel de $\mathbb{C}P^n$ ramifié sur une hypersurface réelle non singulière de degré $2k$. On montre l'existence de limites $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\text{Max } b_i(\mathbb{R}X_m^n)}{m^n} = \zeta_{i,n}$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{Max } b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n)}{k^n} = \delta_{i,n}$. On construit des hypersurfaces par petites perturbations d'hypersurfaces doubles en utilisant la méthode de Viro. Cette construction permet d'obtenir des bornes inférieures récursives pour les $\zeta_{0,n}$ et $\delta_{0,n}$, ainsi que les inégalités $\zeta_{0,3} \geq \frac{\delta_{0,2}}{6} + \frac{1}{12}$ et $\zeta_{1,3} \geq \frac{\delta_{1,2}}{6} + \frac{1}{6}$ concernant les surfaces algébriques dans $\mathbb{C}P^3$. On montre alors que, pour tout $n \geq 5$, il existe des hypersurfaces réelles $X_m^n \subset \mathbb{C}P^n$ qui ne sont pas des T -hypersurfaces, et l'on obtient les inégalités $\frac{35}{96} \leq \zeta_{0,3} \leq \frac{5}{12}$ et $\frac{35}{48} \leq \zeta_{1,3} \leq \frac{5}{6}$.

INTRODUCTION

Une hypersurface algébrique réelle de degré m dans l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ de dimension n est le lieu des zéros dans $\mathbb{C}P^n$ d'un polynôme \bar{f} homogène de degré m en $n+1$ variables et à coefficient réel (ici et par la suite \bar{f} désignera l'homogénéisé d'un polynôme affine f). Sa partie réelle est alors le lieu des zéros dans $\mathbb{R}P^n$ du polynôme \bar{f} . En général, on notera X_m^n une hypersurface algébrique réelle non singulière de degré m dans l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$. Les résultats présentés ici s'inscrivent dans le cadre du problème de la classification des types topologiques possibles de $\mathbb{R}X_m^n$ pour m et n fixés (16^{eme} problème d'Hilbert).

1991 *Mathematics Subject Classification.* 14P25, 14M25, 52B20 .

Key words and phrases. hypersurfaces projectives réelles, méthode de Viro, nombres de betti.

On appelle *hypersurface doublée* toute hypersurface projective réelle X de degré $2k$ dans $\mathbb{C}P^n$ obtenue comme petite déformation d'une hypersurface double:

$$X = \{\bar{f}_k(Z)^2 - \epsilon \cdot \bar{f}_{2k}(Z) = 0\} \subset \mathbb{C}P^n,$$

où $\epsilon > 0$ est suffisamment petit, et \bar{f}_k (resp. \bar{f}_{2k}) est un polynôme réel homogène de degré k (resp. $2k$) en $n+1$ variables Z_0, \dots, Z_n . Dans ce papier, les hypersurfaces $\mathbb{R}X_k^n$ et $\mathbb{R}X_{2k}^n$ définies respectivement par \bar{f}_k et \bar{f}_{2k} seront non singulières et s'intersecteront transversalement. Dans ce cas $\mathbb{R}X$ est non singulière et s'obtient en “doublant” $\mathbb{R}X_{k,+}^n = \mathbb{R}X_k^n \cap \{\bar{f}_{2k} \geq 0\}$. On peut le voir directement ou bien remarquer que $\mathbb{R}X$ s'obtient par une petite déformation réelle à partir de la sous variété lisse $\mathbb{R}Y = \{U^2 - \bar{f}_{2k}(Z) = 0, f_k(Z) = 0\}$ de l'espace projectif tordu $\mathbb{R}P^{n+1}(1, k)$ (les Z_i ont poids 1 et U le poids k) en considérant la famille $\{U^2 - \bar{f}_{2k}(Z) = 0, \bar{f}_k(Z) = t \cdot U\}$ paramétrée par $0 \leq t \leq \sqrt{\epsilon}$ (en particulier $\mathbb{R}X$ est homéomorphe à $\mathbb{R}Y$).

Les hypersurfaces doublées ont déjà été utilisées en topologie des variétés algébriques réelles. À titre d'exemple, tous les types topologiques possibles de quartiques $\mathbb{R}X_4^3$ dans $\mathbb{R}P^3$ peuvent, à une exception près, être réalisés comme parties réelles de quadriques doublées [V1]. Les résultats et constructions présentés ici peuvent être vus comme des généralisations de ceux de [B1] qui concernaient les surfaces algébriques réelles dans $\mathbb{C}P^3$ (voir la remarque 3.1). On construit ici des hypersurfaces doublées de tout degré et toute dimension en utilisant la méthode bien connue due à O. Viro [V2, V3, V4, R] de construction de variétés algébriques réelles avec topologie prescrite. Les polynômes affines f_k et f_{2k} définissant l'hypersurface doublée X sont des polynômes de Viro associées à des fonctions convexes globalement affines, et l'extension de la méthode de Viro au cas des intersections complètes obtenue dans [B2] permet alors de déterminer la topologie du triplet $(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}X_k^n, \mathbb{R}X_{2k}^n)$. On obtient que l'hypersurface doublée $\mathbb{R}X$ est homéomorphe au résultat d'un “découpage-collage” sur l'union des variétés produits $\mathbb{R}X_k^l \times \mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}$, $l = 1, \dots, n$, où X_k^l est l'intersection de X_k^n avec un l -sous-espace de coordonnées de $\mathbb{C}P^n$ et Y_{2k}^{n-l} est le revêtement double réel d'un $(n-l)$ -sous-espace de coordonnées ramifié sur son intersection avec X_{2k}^n . De tels revêtements doubles Y_{2k}^{n-l} sont appelés *plans doublés* et occupent une place importante dans l'étude des variétés réelles, notamment (pour $n-l=2$) des courbes réelles planes. Notons qu'un plan doublé réel Y_{2k}^n se plonge dans l'espace projectif tordu $\mathbb{C}P^{n+1}(1, k)$ (muni de la conjugaison complexe usuelle) comme $Y_{2k}^n = \{U^2 \pm \bar{f}_{2k}(Z) = 0\}$ si $X_{2k}^n = \{\bar{f}_{2k}(Z) = 0\}$ est le lieu de ramification (on dira que $\{U^2 - \bar{f}_{2k}(Z) = 0\}$ est le plan doublé réel associé au polynôme f_{2k}). Il est en général assez difficile (pour $n \geq 3$) d'expliciter complètement la topologie de $\mathbb{R}X$ du fait des collages. Néanmoins, on peut se concentrer sur la “partie asymptotique” du type topologique de $\mathbb{R}X$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, auquel cas les collages deviennent négligeables et les hypersurfaces X_k^l et X_{2k}^{n-l} peuvent être choisies arbitrairement (Proposition 3.4). On peut alors obtenir des estimations sur

les comportements asymptotiques pour m (resp. k) $\rightarrow +\infty$ des valeurs maximales des nombres de betti $b_i(\mathbb{R}X_m^n)$ (resp. $b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n)$) lorsque i et n sont fixés (les groupes d'homologie sont pris à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$). On montre (Proposition 3.1) que les suites $\text{Max } b_i(\mathbb{R}X_m^n)$ et $\text{Max } b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n)$ indexées par m et k , sont asymptotiquement équivalentes à $\zeta_{i,n} \cdot m^n$ et à $\delta_{i,n} \cdot k^n$, respectivement, pour certains réels $\zeta_{i,n}$ et $\delta_{i,n}$. En d'autres termes, pour i et n fixés, on montre l'existence des limites

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\text{Max } b_i(\mathbb{R}X_m^n)}{m^n} = \zeta_{i,n}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{Max } b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n)}{k^n} = \delta_{i,n}.$$

Notre construction d'hypersurfaces doublées permet alors de montrer les inégalités (théorèmes 3.1 et 3.2)

$$\zeta_{0,n} \geq \frac{1}{2^n - 2} \sum_{l=1}^{n-1} \zeta_{0,l} \cdot \delta_{0,n-l}, \quad \delta_{0,n} \geq \sum_{l=1}^{n-1} \zeta_{0,l} \cdot \delta_{0,n-l} + \zeta_{0,n}.$$

On obtient ainsi des bornes inférieures récursives pour les $\zeta_{0,n}$ et $\delta_{0,n}$, desquelles est extraite une borne explicite (Proposition 3.5)

$$\zeta_{0,n} \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Des bornes supérieures (Proposition 3.2) sont également obtenues de manière classique en utilisant l'inégalité de Smith-Thom

$$b_*(\mathbb{R}X) \leq b_*(X),$$

valable pour toute variété algébrique réelle X et où b_* désigne la somme totale des nombres de Betti, ainsi que les inégalités de Comessatti-Petrowsky-Oleinik généralisées

$$|\chi(\mathbb{R}X) - 1| \leq h^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(X) - 1,$$

valables (en particulier) pour toute variété algébrique projective réelle non singulière de dimension paire n et où χ désigne la caractéristique d'Euler et $h^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ le nombre de Hodge de type $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$. On renvoie à [De-Kha] pour un survey récent sur la topologie des variétés algébriques réelles.

Le tableau 1. (sous-section 3.2) recense les estimations obtenues pour les $\zeta_{0,n}$ et $\delta_{0,n}$ tels que $n \leq 7$.

On s'intéresse ensuite au cas des surfaces algébriques réelles dans $\mathbb{C}P^3$. On montre les inégalités (Théorème 3.3)

$$\frac{\delta_{0,2}}{6} + \frac{1}{12} \leq \zeta_{0,3} \leq \frac{5}{12}, \quad \frac{\delta_{1,2}}{6} + \frac{1}{6} \leq \zeta_{1,3} \leq \frac{5}{6}.$$

Comme corollaire de ces inégalités et des inégalités $\delta_{0,2} \geq \frac{27}{16}$ et $\delta_{1,2} \geq \frac{27}{8}$ réalisées par de récents contre-exemples à la conjecture de Ragsdale obtenus par Itenberg [I3], on améliore (Théorème 3.1) le résultat principal de [B1] (voir la remarque 3.1)

$$\frac{35}{96} \leq \zeta_{0,3} \leq \frac{5}{12}, \quad \frac{35}{48} \leq \zeta_{1,3} \leq \frac{5}{6}.$$

On s'intéresse ensuite (voir la sous-section 3.3) aux T -variétés algébriques réelles qui sont par définition des variétés algébriques réelles construites par la version combinatoire de la méthode de Viro appelée *patchwork combinatoire* ou *T-construction* (voir la sous-section 3.3). Le patchwork combinatoire est un outil de construction très puissant. Il a par exemple servi à Itenberg pour obtenir des contre-exemples à une vieille conjecture attribuée à Ragsdale (voir [I1, I3]), ainsi qu'à Viro et Itenberg [I-V] pour montrer l'exactitude de l'inégalité de Smith-Thom pour les hypersurfaces algébriques $X_m^n \subset \mathbb{CP}^n$ de tout degré et toute dimension. La question est alors d'estimer la "richesse" des T -variétés. On montre (Proposition 3.6) l'existence de nombres réels $Th_{i,n}$ et $Td_{i,n}$ définis comme pour $h_{i,n}$ et $d_{i,n}$ mais en se restreignant aux T -variétés de la famille correspondante. Des bornes supérieures pour certains de ces nombres ont récemment été obtenues par Itenberg et Shustin [I-S]. Notre construction permet alors de montrer (Théorème 3.4) l'existence d'hypersurfaces $X_m^n \subset \mathbb{CP}^n$ qui ne sont pas des T -hypersurfaces pour tout $n \geq 5$ et tout degré m suffisamment grand.

Le papier est divisé en trois sections. La première section est consacrée à des rappels sur la méthode de viro. Dans la deuxième section on présente notre construction d'hypersurfaces doublées. La dernière section est consacrée aux applications de cette construction concernant des valeurs maximales asymptotiques de nombres de Betti.

1. Méthode de Viro

On commence par rappeler la notion de carte d'un polynôme.

1.1. Cartes d'un polynôme. À partir de maintenant, un point entier de \mathbb{R}^n est un point à coordonnées entières et un polytope est un polytope convexe à sommets entiers dans \mathbb{R}^n . Soit T_m^n le polytope de Newton d'un polynôme affine générique de degré m en n variables:

$$T_m^n = \text{conv} \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, y_1, \dots, y_n \geq 0, y_1 + \dots + y_n \leq m\}.$$

On note $e_0 = (0, \dots, 0)$ et e_i le sommet de T_m^n dont la coordonnée y_i est égale à m . Soient $Z = (Z_0 : \dots : Z_n)$ des coordonnées homogènes sur \mathbb{CP}^n . On fait correspondre à chacune des faces Γ de T_m^n (comprenant T_m^n lui même) un sous-espace projectif de \mathbb{CP}^n comme suit: si $\Gamma = \text{conv}\{e_i, i \in I\}$ avec $I \subset \{0, \dots, n\}$, alors $X(\Gamma)$ est le sous-espace projectif $\mathbb{CP}^{|I|-1}$ de coordonnées homogènes $Z_i, i \in I$, i.e. le sous-espace d'équations $Z_j = 0, j \in \{0, \dots, n\} \setminus I$.

On considère la carte affine $\{Z_0 \neq 0\}$ munie des coordonnées affines $z = (z_1, \dots, z_n)$ avec $z_i = Z_i/Z_0, i = 1, \dots, n$. Si $f(z)$ est un polynôme de polytope de newton T_m^n et Γ est une face de T_m^n , alors l'intersection de

l'hypersurface $\{\bar{f} = 0\} \subset \mathbb{C}P^n$ (définie par l'homogénéisé de f) et du sous-espace $X(\Gamma)$ coïncide avec l'hypersurface $\{f^\Gamma = 0\} \subset X(\Gamma)$, où f^Γ est le tronqué de f sur Γ : $f^\Gamma(z) = \sum_{w \in \Gamma} a_w z^w$ si $f(z) = \sum a_w z^w$.

Ce que l'on vient de décrire est un cas particulier d'une correspondance $P \rightarrow X(P)$ (surjective mais non injective) de l'ensemble des polytopes sur celui des variétés toriques projectives (normales ou non) ayant les propriétés suivantes. Pour toute face Γ d'un polytope P la variété $X(\Gamma)$ se plonge comme une sous variété torique de $X(P)$ de telle sorte que pour deux faces Γ et Γ' de P l'on ait $X(\Gamma) \cap X(\Gamma') = X(\Gamma \cap \Gamma')$. Tout polynôme f de polytope de Newton P définit une hypersurface de $X(P)$, cette hypersurface intersecte $X(\Gamma)$ le long de l'hypersurface définie par f^Γ pour toute face Γ de P .

Soit P un polytope situé dans l'orthant positif $(\mathbb{R}_+)^n$. L'application moment associée à un ensemble de points entiers \mathcal{P} d'enveloppe convexe P est l'application $\phi : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow P$ définie par

$$\phi(z) = \frac{\sum_{i=0}^s |z^{w_i}| w_i}{\sum_{i=0}^s |z^{w_i}|}.$$

On identifie à $(\mathbb{Z}/2)^n$ le groupe des symétries de \mathbb{R}^n par rapport aux hyperplans de coordonnées $\{y_i = 0\}$ ainsi que le groupe des symétries de \mathbb{R}^n par rapport aux hyperplans de coordonnées $\{z_i = 0\}$ via les isomorphismes $g = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \mapsto ((y_1, \dots, y_n) \mapsto ((-1)^{\epsilon_1} y_1, \dots, (-1)^{\epsilon_n} y_n))$ et $g = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \mapsto ((z_1, \dots, z_n) \mapsto ((-1)^{\epsilon_1} z_1, \dots, (-1)^{\epsilon_n} z_n))$. Le groupe de symétries identifié à $(\mathbb{Z}/2)^n$ sera clair suivant le contexte.

On note $\mathbb{R}(g)$ l'orthant obtenu en prenant l'image de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ par $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$. On considère la restriction de ϕ à $(\mathbb{R}_+^*)^n$ et on étend l'application obtenue en une application (que l'on appellera à nouveau application moment) $\tilde{\phi} : (\mathbb{R}^*)^n \rightarrow P^*$ où $P^* = \bigcup_{g \in (\mathbb{Z}/2)^n} g(P)$ par la règle $\tilde{\phi}(g(z)) = g(\phi(z))$ si $z \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Si P est d'intérieur non vide i.e. $\dim(P) = n$, alors $\tilde{\phi}$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}(g)$ sur l'intérieur de $g(P)$ pour tout $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$. Soit C_P la variété topologique résultant des identifications suivantes sur P^* : pour toute face Γ de P^* et tout vecteur $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ orthogonal à Γ , la face Γ est identifiée à la copie symétrique $g(\Gamma)$ où g est la réduction de α dans $(\mathbb{Z}/2)^n$. Pour toute face Γ de P , l'image de $\bigcup_{g \in (\mathbb{Z}/2)^n} g(\Gamma)$ dans C_P coïncide avec C_Γ et, si $\dim(P) = n$, l'application $\tilde{\phi}$ peut être étendue en un homéomorphisme $\mathbb{R}X(P) \rightarrow C_P$ envoyant $\mathbb{R}X(\Gamma)$ sur C_Γ pour toute face Γ de P . Un tel homéomorphisme sera dit stratifié par la suite.

A titre d'exemple, si $P = T_m^n$ alors C_P s'obtient en identifiant les points antipodaux situés sur le bord du polytope

$$\text{conv} \{(\pm m, 0, \dots, 0), (0, \pm m, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \pm m)\}.$$

Soit f un polynôme de polytope de Newton P . On appelle carte de f chacun des ensembles

$$C_P^g(f) := \tilde{\phi}(\{z \in \mathbb{R}(g), f(z) = 0\}) \subset g(P), \quad g \in (\mathbb{Z}/2)^n,$$

ainsi que l'adhérence $C_P(f)$ de $\tilde{\phi}(\{z \in (\mathbb{R}^*)^n, f(z) = 0\})$ dans C_P (ces cartes dépendent de l'ensemble \mathcal{P} choisi, dans ce papier on prendra toujours $\mathcal{P} = P \cap \mathbb{Z}^n$). Notons que l'on a $C_P^g(f) = g(C_P^{id}(f \circ g))$. La carte $C_P(f)$ s'obtient par recollement des cartes $C_P^g(f)$ dans C_P et vérifie la propriété $C_P(f) \cap C_\Gamma = C_\Gamma(f^\Gamma)$ pour toute face Γ de P . Si $\dim(P) = n$, l'application $\tilde{\phi}$ donne, pour tout $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$, un homéomorphisme de paire $(\mathbb{R}(g), \{f = 0\} \cap \mathbb{R}(g)) \simeq (int(g(P)), C_P^g(f))$ et s'étend en un homéomorphisme $(\mathbb{R}X(P), \{\tilde{f} = 0\}) \simeq (C_P, C_P(f))$. Le polynôme f est dit *non dégénéré* si pour toute face Γ de P (comprenant P lui même) le tronqué de f sur Γ définit une hypersurface non singulière de $(\mathbb{R}^*)^n$. Si f est non dégénéré et $X(P)$ est non singulière alors l'hypersurface de $\mathbb{R}X(P)$ définie par f est non singulière.

1.2. Transformations affines entières unimodulaires. On rappelle des résultats bien connus qui nous seront utiles à plusieurs reprises. Notons $AF_n(\mathbb{Z})$ le groupe des transformations affines unimodulaires de \mathbb{R}^n à coefficients entiers. Soit $\Delta \in AF_n(\mathbb{Z})$. La transformation Δ est la composée d'une translation par un point $b \in \mathbb{Z}^n$ et d'une transformation $L \in GL_n(\mathbb{Z})$, que l'on appellera partie linéaire de Δ . Le changement de coordonnées multiplicatif du tore complexe correspondant à Δ (en fait à L) est l'application

$$\Delta_* : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto \tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$$

définie par

$$\tilde{z}_j = \prod_{i=1}^n z_i^{(L^{-1})_{ij}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Soit P un polytope dans \mathbb{R}^n . On a alors $X(\Delta(P)) = X(P)$. L'image par Δ d'un polynôme $f \in \mathbb{R}[z_1, \dots, z_n]$ défini par $f(z) = \sum a_w z^w$ est le polynôme $\tilde{f} \in \mathbb{R}[\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n]$ défini par $\tilde{f}(\tilde{z}) = \tilde{z}^b \cdot \sum a_w \tilde{z}^{L(w)}$. Si P est le polytope de Newton de f , alors le polytope de Newton de \tilde{f} est $\Delta(P)$. À partir de l'égalité $z^w = \tilde{z}^{L(w)}$ valable pour tout $w \in \mathbb{Z}^n$, on obtient facilement que f et \tilde{f} définissent la même hypersurface dans $(\mathbb{C}^*)^n$, et donc dans $X(\Delta(P)) = X(P)$. En particulier, f est non dégénéré si et seulement si \tilde{f} l'est. De plus, si $\phi : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow P$ est l'application moment relative au système de coordonnées (z_1, \dots, z_n) et $\tilde{\phi} : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \Delta(P)$ est l'application moment relative au système de coordonnées $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$, alors on a $(\Delta \circ \phi)(z) = \tilde{\phi}(\tilde{z})$. En utilisant cette égalité, on peut toujours se ramener au cas où le polytope est non vide (de dimension maximale).

1.3. Méthode de Viro pour les hypersurfaces. On considère une hypersurface réelle de degré m dans $\mathbb{C}P^n$ définie, pour $t > 0$ suffisamment petit, par un polynôme affine

$$f_t(z) = \sum_{w \in \mathcal{T}} a_w t^{\nu(w)} z^w$$

de polytope de Newton T_m^n , où les a_w sont des coefficients réels et ν est une application à valeurs entières définie sur $\mathcal{T} \subset (\mathbb{Z})^n$. Un tel polynôme est appelé *polynôme de Viro*.

On associe à ν une subdivision polyédrale τ de T en projetant par $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la réunion G des faces de la partie inférieure du bord du polytope

$$\hat{T} = \text{conv} \{(w, \nu(w)), w \in \mathcal{T}\}$$

(G est l'union des faces compactes du polyèdre $(0, \dots, 0) \times \mathbb{R}_+ + \hat{T}$). Une subdivision polyédrale obtenue de cette manière est dite *convexe* (ou cohérente). Soit f le polynôme obtenu en posant $t = 1$ dans f_t . On fait l'hypothèse suivante.

Hypothèse. Pour tout $F \in \tau$ le polynôme f^F est non dégénéré.

Les cartes $C_F^g(f^F)$, $F \in \tau$ et $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$, se recollent entre elles dans C_T . Soit S le résultat d'un tel collage. Notons X l'hypersurface réelle $\{\bar{f}_t(x) = 0\}$ de degré m dans $\mathbb{C}P^n$.

Rappelons qu'un homéomorphisme $\mathbb{R}X(P) \rightarrow C_P$ est dit stratifié si il envoie $\mathbb{R}X(\Gamma)$ sur C_Γ pour toute face Γ de P . On peut maintenant énoncer le théorème de Viro [V2, V3, V4] (voir aussi [R, B2]).

THÉORÈME 1.1 (Viro). *Pour $t > 0$ suffisamment petit le polynôme f_t est non dégénéré (en particulier $\mathbb{R}X$ est non singulière) et il existe un homéomorphisme stratifié $\mathbb{R}P^n \rightarrow C_T$ envoyant $\mathbb{R}X$ sur S .*

1.4. Méthode de Viro pour les hypersurfaces doublées. On considère une hypersurface doublée réelle $X = \{\bar{f}_k^2 - \epsilon \cdot \bar{f}_{2k} = 0\}$ ($0 < \epsilon \ll 1$) de degré $2k$ dans $\mathbb{C}P^n$ où f_k et f_{2k} sont, pour $t > 0$ suffisamment petit, des polynômes de Viro $f_k = f_{1,t}$ et $f_{2k} = f_{2,t}$

$$f_{i,t}(z) = \sum_{w \in \mathcal{T}_i} a_{i,w} t^{\nu_i(w)} z^w, \quad i = 1, 2,$$

de polytopes de Newton $T_1 = T_k^n$ et $T_2 = T_{2k}^n$, respectivement.

On note τ_i la subdivision polyédrale de T_i associée à ν_i . Soit $T = T_{3k}^n$ la somme de Minkowsky $T_1 + T_2$. On associe à la paire (ν_1, ν_2) une subdivision polyédrale τ de T en projetant par $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la réunion G des faces inférieures du polytope

$$\hat{T} = \text{conv} \{(w_1 + w_2, \nu_1(w_1) + \nu_2(w_2)), w_i \in \mathcal{T}_i\}.$$

Notons G_i la réunion des faces de la partie inférieure du polytope \hat{T}_i correspondant à ν_i (τ_i s'obtient donc en projetant G_i). Alors chacune des facettes (faces de dimension maximale) de G s'écrit de manière unique comme la somme de Minkowsky d'une face de G_1 et d'une face de G_2 . En projetant, on obtient alors une représentation, induite par (ν_1, ν_2) , de chaque polytope $F \in \tau$ comme $F = F_1 + F_2$, $F_i \in \tau_i$. Par la suite, lorsque l'on écrira $F = F_1 + F_2$ avec $F \in \tau$ et $F_i \in \tau_i$, on se référera toujours à la

représentation induite par (ν_1, ν_2) . Pour $i = 1, 2$, on note f_i le polynôme obtenu en posant $t = 1$ dans $f_{i,t}$. On fait les hypothèses suivantes.

Hypothèses.

- (1) Pour tout $F_i \in \tau_i$, le polynôme $f_i^{F_i}$ est non dégénéré.
- (2) La paire (ν_1, ν_2) est suffisamment générique au sens où si $F = F_1 + F_2$ avec $F \in \tau$ et $F_i \in \tau_i$, alors $\dim(F) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$.

Sous la deuxième hypothèse, la subdivision τ est dite *mixte*.

Pour chaque polytope $F \in \tau$ et chaque $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$, si $F = F_1 + F_2$ avec $F_i \in \tau_i$, on considère les sous-ensembles de $g(F) = g(F_1) + g(F_2)$

$$C_{F_1}^g(f_1^{F_1}) + g(F_2), \quad g(F_1) + C_{F_2}^g(f_2^{F_2}).$$

Les ensembles $C_{F_1}^g(f_1^{F_1}) + g(F_2)$, $F \in \tau$ et $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$, se recollent entre eux dans C_T . Soit S^1 le résultat d'un tel collage. De même, les ensembles $g(F_1) + C_{F_2}^g(f_2^{F_2})$, $F \in \tau$ et $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$, se recollent entre eux dans C_T . Soit S^2 le résultat d'un tel collage. Notons X_k et X_{2k} respectivement les hypersurfaces $\{\bar{f}_{1,t} = 0\}$ et $\{\bar{f}_{2,t} = 0\}$ de $\mathbb{C}P^n$.

Le résultat suivant est un corollaire immédiat de ([B2], Théorème 2.1.)

PROPOSITION 1.1. *Pour $t > 0$ suffisamment petit, les hypersurfaces $\mathbb{R}X_k$ et $\mathbb{R}X_{2k}$ sont non singulières, s'intersectent transversalement, et il existe un homéomorphisme stratifié $\mathbb{R}P^n \rightarrow C_T$ envoyant $\mathbb{R}X_k$ sur S^1 et $\mathbb{R}X_{2k}$ sur S^2 .*

Notons que la proposition précédente implique que, pour $t > 0$ et $\epsilon > 0$ suffisamment petits, l'hypersurface doublée $\mathbb{R}X = \{\bar{f}_{1,t}^2 - \epsilon \cdot \bar{f}_{2,t} = 0\} \subset \mathbb{R}P^n$ est non singulière. On définit deux sous-espaces S_+^2 et S_-^2 de C_T par les conditions

$$C_T = S_+^2 \cup S_-^2, \quad S^2 = S_+^2 \cap S_-^2$$

et, si $\mathbf{0}$ désigne l'image dans C_T du sommet $(0, \dots, 0)$ de T ,

$$\mathbf{0} \in S_\pm^2 \iff \pm f_{2,t}(0, \dots, 0) \geq 0.$$

Un homéomorphisme stratifié $\mathbb{R}P^n \rightarrow C_T$ envoie $(1 : 0 : \dots : 0)$, qui est la variété torique associée au sommet $(0, \dots, 0)$ de T , sur $\mathbf{0}$. Par suite, un tel homéomorphisme envoie $\{\pm \bar{f}_{2,t}(Z) \geq 0\}$ sur S_\pm^2 . Rappelons que $\mathbb{R}X$ s'obtient en doublant $\mathbb{R}X_{k,+} := \{Z \in \mathbb{R}X_k, \bar{f}_{2,t}(Z) \geq 0\}$. La proposition 1.1 implique donc le résultat suivant.

COROLLAIRE 1.1. *Pour $t, \epsilon > 0$ suffisamment petits, l'hypersurface doublée $\mathbb{R}X$ est non singulière et $\mathbb{R}X_{k,+}$ est homéomorphe à $S_+^2 \cap S^1$.*

Soit $C_{F_2,+}^g(f_2^{F_2}) \subset g(F_2)$ l'image de $\{z \in \mathbb{R}(g), f_2^{F_2}(z) \geq 0\}$ par une application moment $\tilde{\phi}$ envoyant $\{z \in \mathbb{R}(g), f_2^{F_2}(z) = 0\}$ sur $C_{F_2}^g(f_2^{F_2})$. Alors S_+^2 s'obtient par recollement des

$$g(F_1) + C_{F_2,+}^g(f_2^{F_2}) \subset g(F)$$

et donc $S_+^2 \cap S^1$ s'obtient par recollement des

$$C_{F_1}^g(f_1^{F_1}) + C_{F_2,+}^g(f_2^{F_2}) \subset g(F).$$

2. Construction

On reprend la construction décrite dans la sous-section 1.4 d'une hypersurface doublée.

Soit $X = \{\bar{f}_k^2 - \epsilon \cdot \bar{f}_{2k} = 0\}$ ($0 < \epsilon \ll 1$) une hypersurface doublée de degré $2k$ dans $\mathbb{C}P^n$ où f_k et f_{2k} sont donnés, pour $t > 0$ suffisamment petit, par des polynômes de Viro $f_k = f_{1,t}$ et $f_{2k} = f_{2,t}$

$$f_{i,t}(z) = \sum_{w \in \mathcal{T}_i} a_{i,w} t^{\nu_i(w)} z^w, \quad i = 1, 2$$

et supposons à partir de maintenant que, pour $i = 1$ et $i = 2$,

l'application ν_i est la restriction d'une application affine sur \mathbb{R}^n .

Chacune des triangulations τ_i associée à ν_i est alors triviale au sens où elle consiste en la réunion des faces de T_i (en particulier, la triangulation τ_i contient T_i comme seul n -simplexe et les sommets de τ_i sont les sommets de T_i). Pour $i = 1, \dots, n$, on note u_i (resp. v_i) le sommet de T_1 (resp. T_2) dont la i -ème coordonnée est égale à k (resp. $2k$) puis $u_0 = v_0 = (0, \dots, 0)$. Soit τ la subdivision convexe de $T = T_1 + T_2$ associée à la paire (ν_1, ν_2) . Chacun des polytopes de τ est la forme $F_1 + F_2$ où F_i est une face de T_i . Rappelons que τ est mixte si et seulement si chacune de ces sommes $F_1 + F_2$ est une somme directe.

LEMME 2.1. *La subdivision τ est une subdivision mixte si et seulement s'il existe une permutation σ de $\{0, \dots, n\}$ pour laquelle τ soit constituée des n -polytopes*

$$F_l = \text{conv}\{u_{\sigma(0)}, \dots, u_{\sigma(l)}\} + \text{conv}\{v_{\sigma(l)}, \dots, v_{\sigma(n)}\}, \quad l = 0, \dots, n$$

(et de leurs faces).

PREUVE. Le "Cayley trick" combinatoire (voir [S2, H-R-S]) établit une bijection entre les subdivisions mixtes convexes de $T_1 + T_2$ à sommets dans $\{u_i + v_j \mid i, j = 0, \dots, n\}$ et les triangulations convexes à sommets dans $\{u_i \times \{0\} \mid i = 0, \dots, n\} \cup \{v_j \times \{1\} \mid j = 0, \dots, n\}$ du prisme obtenu en prenant le join $(T_1 \times \{0\}) \star (T_2 \times \{1\}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Cette bijection envoie un simplexe $(\sigma_1 \times \{0\}) \star (\sigma_2 \times \{1\})$ de la triangulation du prisme (σ_i est une face de T_i) sur le polytope $\sigma_1 + \sigma_2$. De manière évidente, l'ensemble des triangulations convexes du type précédent est en bijection avec celui des triangulations convexes à sommets entiers du prisme $T_1^n \times T_1^1$. Le résultat découle alors de la description connue des triangulations convexes à sommets entiers de $T_1^n \times T_1^1$ (voir, par exemple, [G-K-Z], section 7.3.C). \square

Pour $i = 1, \dots, n$, posons $a_i = \nu_1(u_i)$ et $b_i = \nu_2(v_i)$ de telle sorte que ν_1 et ν_2 soient les restrictions des applications affines $(y_1, \dots, y_n) \mapsto$

$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^n (a_i - a_0) y_i + a_0$ et $(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{2k} \sum_{i=0}^n (b_i - b_0) y_i + b_0$, respectivement.

PROPOSITION 2.1. *La subdivision τ est une subdivision mixte si et seulement si $2a_i - b_i \neq 2a_j - b_j$ pour tout $i \neq j$, auquel cas, τ est constituée des n -polytopes*

$$F_l = \text{conv}\{u_{\sigma(0)}, \dots, u_{\sigma(l)}\} + \text{conv}\{v_{\sigma(l)}, \dots, v_{\sigma(n)}\}, \quad l = 0, \dots, n$$

où σ est l'unique permutation de $\{0, \dots, n\}$ telle que

$$2a_{\sigma(0)} - b_{\sigma(0)} < 2a_{\sigma(1)} - b_{\sigma(1)} < \dots < 2a_{\sigma(n)} - b_{\sigma(n)}.$$

PREUVE. Supposons que τ soit une subdivision mixte associée à une permutation σ et montrons que l'on a $2a_{\sigma(0)} - b_{\sigma(0)} < 2a_{\sigma(1)} - b_{\sigma(1)} < \dots < 2a_{\sigma(n)} - b_{\sigma(n)}$. Quitte à utiliser la transformation de $AF_n(\mathbb{Z})$ envoyant $u_{\sigma(i)} + v_{\sigma(i)}$ sur $u_i + v_i$ pour $i = 0, \dots, n$ (une telle transformation envoie $u_{\sigma(i)}$ et $v_{\sigma(i)}$ sur u_i et v_i , respectivement), on peut se ramener au cas où σ est l'identité i.e. τ est la subdivision mixte dont les n -polytopes sont les $F_l = \text{conv}\{u_0, \dots, u_l\} + \text{conv}\{v_l, \dots, v_n\}$, $l = 0, \dots, n$. Soit $\nu : T \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction (convexe, affine par morceaux) dont le graphe est G . Pour tout $l = 0, \dots, n$, il existe une fonction affine $\alpha_l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\nu(y) > \alpha_l(y) \forall y \in T \setminus F_l$ et $\nu(y) = \alpha_l(y) \forall y \in F_l$. Sachant que $u_i + v_j \neq u_{i'} + v_{j'} \forall (i, j) \neq (i', j')$, on obtient que $\nu(u_i + v_j) = \nu_1(u_i) + \nu_2(v_j) = a_i + b_j$ pour tout $(i, j) \in \{0, \dots, n\}^2$. On connaît alors les valeurs de α_l aux sommets de F_l . Ces valeurs déterminent α_l puisque α_l est affine et que F_l est de dimension n . On obtient que α_l est l'application envoyant (y_1, \dots, y_n) sur

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^l (a_i - a_0) y_i + \frac{1}{2k} \sum_{i=l+1}^n [b_i - b_l + 2(a_l - a_0)] y_i + 3a_0 + b_l - 2a_l.$$

On montre ensuite facilement que les inégalités $a_i + b_j = \nu(u_i + v_j) > \alpha_l(u_i + v_j)$ valables pour tout $l = 0, \dots, n$ et tout $u_i + v_j \in T \setminus F_l$ impliquent que $2a_0 - b_0 < 2a_1 - b_1 < \dots < 2a_n - b_n$.

Réciproquement, supposons que τ ne soit pas une subdivision mixte. Il existe alors une face F_1 de T_1 et une face F_2 de T_2 telles que $F = F_1 + F_2 \in \tau$ et $\dim(F) < \dim(F_1) + \dim(F_2)$. Pour de telles faces F_1 et F_2 , il existe $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $i \neq j$, tels que, d'une part, u_i et u_j sont des sommets de F_1 , d'autre part, v_i et v_j sont des sommets de F_2 . Les points $u_j + v_i$, $u_i + v_i$ et $u_j + v_j$ appartiennent alors à F et vérifient l'égalité $u_j + v_i = 2/3(u_i + v_i) + 1/3(u_j + v_j)$. L'application ν étant affine sur F , on en déduit que $\nu(u_j + v_i) = 2/3\nu(u_i + v_i) + 1/3\nu(u_j + v_j)$ i.e. $a_j + b_i = 2/3(a_i + b_i) + 1/3(a_j + b_j)$ et donc $2a_i - b_i = 2a_j - b_j$. \square

Pour se fixer les idées, on va maintenant supposer que la subdivision τ est la subdivision mixte dont les n -polytopes sont les polytopes

$$F_l = F_1^l + F_2^{n-l}, \quad l = 0, \dots, n$$

où l'on pose

$$F_1^l = \text{conv}\{u_0, \dots, u_l\}, \quad F_2^{n-l} = \text{conv}\{v_l, \dots, v_n\}.$$

Pour cela il suffit de choisir des valeurs pour les a_i et b_i telles que $2a_0 - b_0 < 2a_1 - b_1 < \dots < 2a_n - b_n$.

EXEMPLE 2.1. Si $b_i = 0$ et $a_i = ki$ pour $i = 0, \dots, n$ de telle sorte que ν_2 soit l'application nulle et ν_1 la restriction de l'application $(y_1, \dots, y_n) \mapsto y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n$, alors la subdivision τ associée est la subdivision mixte dont les n -polytopes sont les polytopes

$$F_l = F_1^l + F_2^{n-l}, \quad l = 0, \dots, n.$$

On note comme dans la section précédente f_i ($i = 1, 2$) le polynôme obtenu en posant $t = 1$ dans $f_{i,t}$, puis on pose $f_1^l = f_1^{F_1^l}$ et $f_2^{n-l} = f_2^{F_2^{n-l}}$ (notons que $f_k^n = f_1$ et que $f_{2k}^n = f_2$). On fait l'hypothèse suivante.

Hypothèse. f_1 et f_2 sont des polynômes non dégénérés.

Par définition, chacun des f_1^l et f_2^{n-l} est alors non dégénéré. Les deux hypothèses de la sous-section 1.4 sont donc maintenant satisfaites. Rappelons que $X(F_1^l) = \{Z_{l+1} = \dots = Z_n = 0\} \subset \mathbb{C}P^n$ et que $X(F_2^{n-l}) = \{Z_0 = \dots = Z_{l-1} = 0\} \subset \mathbb{C}P^n$. Les polynômes f_1^l et f_2^{n-l} définissent des hypersurfaces dans $X(F_1^l)$ et $X(F_2^{n-l})$, que l'on note X_k^l et X_{2k}^{n-l} , respectivement. On a alors

$$X_k^l = X_k^n \cap X(F_1^l) \quad \text{et} \quad X_{2k}^{n-l} = X_{2k}^n \cap X(F_2^{n-l}).$$

Chacun des f_i^l étant non dégénérés, chacune des hypersurfaces $\mathbb{R}X_k^l$ et $\mathbb{R}X_{2k}^{n-l}$ est non singulière.

Soit l un nombre entier compris entre 1 et $n - 1$. On considère la transformation affine Δ_1 (resp. Δ_2 , Δ) permutant u_0 et u_l (resp. v_0 et v_l , $u_0 + v_0$ et $u_l + v_l$) et laissant fixe chacun des autres sommets de T_1 (resp. T_2 , T). Les transformations Δ_1 , Δ_2 et Δ appartiennent à $AF_n(\mathbb{Z})$ et ont pour même partie linéaire la matrice $L \in GL_n(\mathbb{Z})$ définie par $L_{ij} = -1$ si $i = l$ et $L_{ij} = \delta_{ij}$ sinon. Jusqu'alors le système de coordonnées utilisé pour le tore algébrique complexe $(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}P^n \setminus \cup_{i=0}^n \{Z_i = 0\}$ était le système de coordonnées $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_i = Z_i/Z_0$, de la carte affine $\{Z_0 \neq 0\}$. Les transformations affines Δ_1 , Δ_2 et Δ correspondent au même changement de coordonnées multiplicatif $z \mapsto \tilde{z}$ défini par $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$ avec $\tilde{z}_l = Z_0/Z_l$ et $\tilde{z}_i = Z_i/Z_l$ si $i \neq l$. Soient \tilde{f}_1^l et \tilde{f}_2^{n-l} les images dans $\mathbb{R}[\tilde{z}]$ de f_1^l et f_2^{n-l} par Δ_1 et Δ_2 , respectivement. Le polytope de Newton de \tilde{f}_1^l est le polytope $\Delta_1(F_1^l)$ et celui de \tilde{f}_2^{n-l} est $\Delta_2(F_2^{n-l})$. On décompose l'espace \mathbb{R}^n contenant ces polytopes comme le produit $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l}$ en identifiant \mathbb{R}^l à $\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_{l+1} = \dots = y_n = 0\}$ et \mathbb{R}^{n-l} à $\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_1 = \dots = y_l = 0\}$. Le polynôme \tilde{f}_1^l est alors vu comme un polynôme appartenant à $\mathbb{R}[\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_l]$ et ayant pour polytope de Newton $\Delta_1(F_1^l) \subset \mathbb{R}^l$. De même, le polynôme \tilde{f}_2^{n-l} est alors vu comme un

polynôme appartenant à $\mathbb{R}[z_{l+1}, \dots, z_n]$ et ayant pour polytope de Newton $\Delta_2(F_2^{n-l}) \subset \mathbb{R}^{n-l}$. Les hypersurfaces $X_k^l \subset X(F_1^l)$ et $X_{2k}^{n-l} \subset X(F_2^{n-l})$ sont définies par les homogénéisés de \tilde{f}_1^l et de \tilde{f}_2^{n-l} (qui coïncident avec les homogénéisés de f_1^l et de f_2^{n-l}), respectivement.

Notons π_1 (resp. π_2) la projection de $(\mathbb{Z}/2)^n = (\mathbb{Z}/2)^l \times (\mathbb{Z}/2)^{n-l}$ sur son facteur $(\mathbb{Z}/2)^l$ (resp. $(\mathbb{Z}/2)^{n-l}$) et $\pi : (\mathbb{Z}/2)^n \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^l \times (\mathbb{Z}/2)^{n-l}$ l'application $g \mapsto (\pi_1(g), \pi_2(g))$. Pour tout $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$, on a alors $g(\Delta_1(F_1^l)) = g_1(\Delta_1(F_1^l))$, $g(\Delta_2(F_2^{n-l})) = g_2(\Delta_2(F_2^{n-l}))$ si $\pi(g) = (g_1, g_2)$.

Désignons par $c.c(\mathbb{R}^*)^n$ la réunion des 2^n composantes connexes (que l'on appellera orthants) de $(\mathbb{R}^*)^n = \mathbb{R}P^n \setminus \cup_{i=0}^n \{Z_i = 0\}$. Soient ψ_0 et ψ_l les paramétrisations (bijections) $(\mathbb{Z}/2)^n \rightarrow c.c(\mathbb{R}^*)^n$ définies par $\psi_0(g) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid (-1)^{\epsilon_i} z_i > 0, i = 1, \dots, n\}$ et $\psi_l(g) = \{(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n) \in \mathbb{R}^n \mid (-1)^{\epsilon_i} \tilde{z}_i > 0, i = 1, \dots, n\}$, si $g = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. On a $\psi_0(g) = \mathbb{R}(g)$ dans les notations précédentes. On a déjà défini l'orthant positif comme étant $(\mathbb{R}_+^*)^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_i > 0, i = 1, \dots, n\}$. Notons que l'on a $(\mathbb{R}_+^*)^n = \psi_0(id) = \psi_l(id)$, puis que $\psi_0(g) = g((\mathbb{R}_+^*)^n)$ (resp. $\psi_l(g) = g((\mathbb{R}_+^*)^n)$) pour tout $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$ si l'on identifie à $(\mathbb{Z}/2)^n$ le groupe des symétries de \mathbb{R}^n par rapport aux hyperplans de coordonnées $\{z_i = 0\}$ (resp. $\{\tilde{z}_i = 0\}$) comme dans la sous-section 1.1.

Soit $c.c(\mathbb{R}^*)^l$ (resp. $c.c(\mathbb{R}^*)^{n-l}$) l'union des composantes connexes de $(\mathbb{R}^*)^l = \mathbb{R}X(F_1^l) \setminus \cup_{i=0}^l \{Z_i = 0\}$ (resp. $(\mathbb{R}^*)^{n-l} = \mathbb{R}X(F_2^{n-l}) \setminus \cup_{i=l}^n \{Z_i = 0\}$). Par restriction, on obtient des paramétrisations $\psi_{l,1} : (\mathbb{Z}/2)^l \rightarrow c.c(\mathbb{R}^*)^l$, et $\psi_{l,2} : (\mathbb{Z}/2)^{n-l} \rightarrow c.c(\mathbb{R}^*)^{n-l}$ telles que $\psi_l(g) = \psi_{l,1}(g_1) \times \psi_{l,2}(g_2)$ pour tout $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$ avec $\pi(g) = (g_1, g_2)$. Soit $\alpha_l = \psi_l^{-1} \circ \psi_0 : (\mathbb{Z}/2)^n \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^n$ l'application de changement de paramétrisation. On a alors $\mathbb{R}(g) = \psi_0(g) = \psi_l(\alpha_l(g))$ pour tout $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$.

Pour tout nombre entier l compris entre 0 et n , on note

$$Y_{2k}^{n-l} = \{U^2 - \bar{f}_2^{n-l}(Z) = 0\} \subset \mathbb{C}P^{n-l+1}(1, k)$$

le plan doublé associé à \bar{f}_2^{n-l} et

$$\mathbb{R}P_+^{n-l} = \{\bar{f}_2^{n-l} \geq 0\} \subset \mathbb{R}X(F_2^{n-l}).$$

Rappelons que $\mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}$ est non singulier (f_2^{n-l} est non dégénéré), se projette sur $\mathbb{R}P_+^{n-l}$ et se ramifie sur $\mathbb{R}X_{2k}^{n-l}$. On note, respectivement,

$$\mathbb{R}X_k^l(\star), \quad \mathbb{R}X_{2k}^{n-l}(\star), \quad \mathbb{R}P_+^{n-l}(\star) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}(\star)$$

les intersections $\mathbb{R}X_k^l \cap (\mathbb{R}^*)^l$, $\mathbb{R}X_{2k}^{n-l} \cap (\mathbb{R}^*)^{n-l}$, $\mathbb{R}P_+^{n-l} \cap (\mathbb{R}^*)^{n-l}$ et la partie de $\mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}$ se projetant sur $\mathbb{R}P_+^{n-l}(\star)$.

De la même manière, si $1 \leq l \leq n-1$ et si $(g_1, g_2) \in (\mathbb{Z}/2)^l \times (\mathbb{Z}/2)^{n-l}$, on note, respectivement,

$$\mathbb{R}X_k^l(g_1), \quad \mathbb{R}X_{2k}^{n-l}(g_2), \quad \mathbb{R}P_+^{n-l}(g_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}(g_2)$$

les intersections $\mathbb{R}X_k^l \cap \psi_{l,1}(g_1)$, $\mathbb{R}X_{2k}^{n-l} \cap \psi_{l,2}(g_2)$, $\mathbb{R}P_+^{n-l} \cap \psi_{l,2}(g_2)$ et la partie de $\mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}$ se projetant sur $\mathbb{R}P_+^{n-l}(g_2)$.

LEMME 2.2. *Soit $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$.*

Pour tout nombre entier l compris entre 1 et $n-1$, si $(g_1, g_2) = (\pi \circ \alpha_l)(g)$, alors on a les homéomorphismes suivants:

$$C_{F_1^l}^g(f_1^l) \simeq \mathbb{R}X_k^l(g_1), \quad C_{F_2^{n-l}}^g(f_2^{n-l}) \simeq \mathbb{R}X_{2k}(g_2)$$

$$C_{F_2^{n-l},+}^g(f_2^{n-l}) \simeq \mathbb{R}P_+^{n-l}(g_2)$$

PREUVE. Soient $\phi : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow F_1^l$ l'application moment associée à F_1^l et $\phi_l : (\mathbb{C}^*)^l \rightarrow \Delta_1(F_1^l)$ l'application moment associée à $\Delta_1(F_1^l)$, relativement aux systèmes de coordonnées (z_1, \dots, z_n) pour $(\mathbb{C}^*)^n$ et $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_l)$ pour $(\mathbb{C}^*)^l$. Sachant que $z^w = \tilde{z}_l^{-k} \tilde{z}^{\Delta_1(w)}$, on en déduit que pour tout (z_1, \dots, z_n) on a $(\Delta_1 \circ \phi)(z_1, \dots, z_n) = \phi_l(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_l)$, puis que

$$C_{F_1^l}^{id}(f_1^l) \xrightarrow{\Delta_1} C_{\Delta_1(F_1^l)}^{id}(\tilde{f}_1^l).$$

Soit $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$ et $g_1 = (\pi_1 \circ \alpha_l)(g)$. Sachant que $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}(g) = \psi_0(g) \Rightarrow (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_l) \in \psi_{l,1}(g_1)$, on obtient que

$$C_{F_1^l}^{id}(f_1^l \circ g) \xrightarrow{\Delta_1} C_{\Delta_1(F_1^l)}^{id}(\tilde{f}_1^l \circ g_1).$$

Maintenant, par définition on a

$$C_{F_1^l}^g(f_1^l) = g \left(C_{F_1^l}^{id}(f_1^l \circ g) \right), \quad C_{\Delta_1(F_1^l)}^{g_1}(\tilde{f}_1^l) = g_1 \left(C_{\Delta_1(F_1^l)}^{id}(\tilde{f}_1^l \circ g_1) \right).$$

Par conséquent $g_1 \circ \Delta_1 \circ g : g(F_1^l) \rightarrow (g_1 \circ \Delta_1)(F_1^l)$ est un homéomorphisme envoyant $C_{F_1^l}^g(f_1^l)$ sur $C_{\Delta_1(F_1^l)}^{g_1}(\tilde{f}_1^l)$. Pour finir, le polytope $\Delta_1(F_1^l)$ étant de dimension l , la restriction de ϕ_l à $(\mathbb{R}_+^*)^l$ est un homéomorphisme sur l'intérieur de $\Delta_1(F_1^l)$, et donc $g_1 \circ \phi_l \circ g_1 : \psi_{l,1}(g_1) \rightarrow (g_1 \circ \Delta_1)(F_1^l)$ est un homéomorphisme envoyant $\mathbb{R}X_k^l(g_1)$ sur $C_{\Delta_1(F_1^l)}^{g_1}(\tilde{f}_1^l)$. La démonstration de l'existence des deux autres homéomorphismes est tout à fait similaire. \square

La remarque qui suit nous sera utile dans la démonstration de la proposition plus bas.

REMARQUE 2.1. *Sachant que $\mathbb{R}X_k^0 = \mathbb{R}X_{2k}^0 = \emptyset$, pour tout $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$ on a*

$$C_{F_1^0}^g(f_1^0) = C_{F_2^0}^g(f_2^0) = \emptyset.$$

Rappelons que $F_2^0 = (0, \dots, 2k)$ et que $f_2^0 = f_2^{F_2^0} = a_{2,(0,\dots,0,2k)} z_n^{2k}$. On obtient que pour tout $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$ on a

$$\bullet \quad a_{2,(0,\dots,0,2k)} > 0 \Rightarrow$$

$$C_{F_2^0,+}^g(f_2^0) = C_{F_2^0}^g = \{(0, \dots, 0, 2k)\}, \quad \mathbb{R}P_+^0 = X(F_2^0) = \{(0 : \dots : 0 : 1)\},$$

- $a_{2,(0,\dots,0,2k)} < 0 \Rightarrow$

$$C_{F_2^0,+}^g(f_2^0) = \emptyset = \mathbb{R}P_+^0.$$

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette section.

PROPOSITION 2.2. *Pour $t, \epsilon > 0$ suffisamment petits l'hypersurface doublée $\mathbb{R}X$ est non singulière et homéomorphe au collage déterminé par la subdivision τ des variétés produit*

$$\mathbb{R}X_k^l(\star) \times \mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}(\star), \quad l = 1, \dots, n.$$

PREUVE. Soit $Y = \{U^2 - \bar{f}_{2,t}(Z) = 0, \bar{f}_{1,t}(Z) = 0\} \subset \mathbb{C}P^{n+1}(1, k)$, $t > 0$ petit, l'hypersurface réelle se déformant sur X ($\mathbb{R}Y$ est homéomorphe à $\mathbb{R}X$). On note comme dans la sous-section 1.4 X_k et X_{2k} les hypersurfaces définies pour $t > 0$ petit par $f_{1,t}$ et $f_{2,t}$, respectivement, et on pose $\mathbb{R}X_{k,+} := \{Z \in \mathbb{R}X_k, \bar{f}_{2,t}(Z) \geq 0\}$, $\mathbb{R}X_{k,+}(g) := \mathbb{R}X_{k,+} \cap \mathbb{R}(g)$.

Soit $g \in (\mathbb{Z}/2)^n$. On montre que la partie $\mathbb{R}Y(g)$ de $\mathbb{R}Y$ se projetant sur $\mathbb{R}X_{k,+}(g)$ est homéomorphe au collage des

$$\mathbb{R}X_k^l(g_1) \times \mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}(g_2), \quad l = 1, \dots, n-1,$$

tels que $(g_1, g_2) = (\pi \circ \alpha_l)(g)$ et de

$$(\mathbb{R}X_k^n \cap \mathbb{R}(g)) \times \mathbb{R}Y_{2k}^0.$$

D'après le corollaire 1.1, l'espace $\mathbb{R}X_{k,+}(g)$ est homéomorphe à $S_2^+ \cap S_1 \cap \mathbb{R}(g)$ qui s'obtient par collage des

$$C_{F_1^l,+}^g(f_1^l) + C_{F_2^{n-l},+}^g(f_2^{n-l}) \subset g(F_1^l) + g(F_2^{n-l}) = g(F^l), \quad l = 0, \dots, n.$$

En utilisant Le Lemme 2.2, la remarque 2.1 et le fait que $C_{F_1^n,+}^g(f_1^n)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}X_k^n \cap \mathbb{R}(g)$, on obtient alors que $\mathbb{R}X_{k,+}(g)$ est homéomorphe au collage des

$$\mathbb{R}X_k^l(g_1) \times \mathbb{R}P_+^{n-l}(g_2), \quad l = 1, \dots, n-1$$

tels que $(g_1, g_2) = (\pi \circ \alpha_l)(g)$ et de

$$(\mathbb{R}X_k^n \cap \mathbb{R}(g)) \times \mathbb{R}P_+^0.$$

Sachant que $\mathbb{R}Y(g)$ est homéomorphe au double de $\mathbb{R}X_{k,+}(g)$, on obtient que $\mathbb{R}Y(g)$ est homéomorphe au collage pour $l = 1, \dots, n-1$ des doubles des $\mathbb{R}X_k^l(g_1) \times \mathbb{R}P_+^{n-l}(g_2)$ vérifiant $(g_1, g_2) = (\pi \circ \alpha_l)(g)$ et du double de $(\mathbb{R}X_k^n \cap \mathbb{R}(g)) \times \mathbb{R}P_+^0$. Il reste à remarquer que le double de $\mathbb{R}X_k^l(g_1) \times \mathbb{R}P_+^{n-l}(g_2)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}X_k^l(g_1) \times \mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}(g_2)$ et que le double de $(\mathbb{R}X_k^n \cap \mathbb{R}(g)) \times \mathbb{R}P_+^0$ est homéomorphe à $(\mathbb{R}X_k^n \cap \mathbb{R}(g)) \times \mathbb{R}Y_{2k}^0$. \square

Notons que $\mathbb{R}Y_{2k}^0$ est soit vide, soit réduit à deux points distincts suivant le signe du coefficient devant z_n^{2k} dans $f_2(z)$ (voir la remarque 2.1).

Rappelons que X_k (resp. X_{2k}) désigne l'hypersurface de $\mathbb{C}P^n$ définie par $f_{1,t}$ (resp. $f_{2,t}$) pour $t > 0$ suffisamment petit. La remarque qui suit, qui ne sera pas utilisée, implique que dans la proposition 2.2 on peut remplacer X_k^l

par $X_k \cap X(F_1^l)$ et Y_{2k}^{n-l} par le plan doublé associé au tronqué de $f_{2,t}$ sur F_2^{n-l} .

REMARQUE 2.2. ν_i étant la restriction d'une application affine sur \mathbb{R}^n , on a, pour tout $0 < t \leq 1$ et tout $l = 0, \dots, n$, des homéomorphismes de paires

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}X(F_1^l), \mathbb{R}X_k^l) &\simeq (\mathbb{R}X(F_1^l), \mathbb{R}X(F_1^l) \cap \mathbb{R}X_k), \\ (\mathbb{R}X(F_2^{n-l}), \mathbb{R}X_{2k}^{n-l}) &\simeq (\mathbb{R}X(F_2^{n-l}), \mathbb{R}X(F_2^{n-l}) \cap \mathbb{R}X_{2k}). \end{aligned}$$

Cette remarque est une conséquence directe de l'observation suivante. Soit $f_t(z) = \sum_{w \in W} a_w t^{\nu(w)} z^w$ un polynôme de Viro associé à une application ν restriction d'une application affine $(y_1, \dots, y_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i + \lambda_0$. Si f désigne le polynôme obtenu en posant $t = 1$ dans f_t , alors $f_t(z) = t^{\lambda_0} f(\tilde{z})$ où $z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto \tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$ est le changement de coordonnées du tore $(\mathbb{C}^*)^n$ défini par $\tilde{z}_i = t^{\lambda_i} z_i$.

EXEMPLE 2.2 (Suite de l'exemple 2.1). Si ν_1 est la restriction de l'application $(y_1, \dots, y_n) \mapsto y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n$ et ν_2 est l'application nulle, alors les homéomorphismes $\mathbb{R}X(F_1^l) \rightarrow \mathbb{R}X(F_1^l)$ plus haut sont donnés par les restrictions de l'application $(Z_0 : Z_1 : Z_2 : \dots : Z_n) \mapsto (Z_0 : tZ_1 : t^2Z_2 : \dots : t^nZ_n)$ et les homéomorphismes $\mathbb{R}X(F_2^{n-l}) \rightarrow \mathbb{R}X(F_2^{n-l})$ sont donnés par l'identité.

3. Asymptotiques de nombres de Betti

3.1. Comportement asymptotique. Soit i un entier positif.

On note, respectivement,

$$\text{Max } b_i(\mathbb{R}X_m^n) \quad \text{et} \quad \text{Max } b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n)$$

la valeur maximale des nombres de Betti $b_i(\mathbb{R}X_m^n)$ prise sur l'ensemble des hypersurfaces X_m^n de degré m dans $\mathbb{C}P^n$ pour m et n fixés, et la valeur maximale des nombres de Betti $b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n)$ prise sur l'ensemble des plans doublés $Y_{2k}^n = \{U^2 - \bar{f}_{2k}(Z) = 0\} \subset \mathbb{C}P^{n+1}(1, k)$ associés à des polynômes f_{2k} de degré $2k$ pour k et n fixés.

On s'intéresse aux suites

$$(\text{Max } b_i(\mathbb{R}X_m^n))_{m \geq 1}, \quad (\text{Max } b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n))_{k \geq 1},$$

et plus particulièrement à leurs comportements asymptotiques.

Ici et par la suite, l'expression

$$\mathcal{R}(n, m)$$

désignera une fonction “reste” de n et de m comprise entre deux fonctions polynomiales de degré n en m (dont les coefficients ne dépendent pas de m). En particulier, on aura

$$\mathcal{R}(n, m)/m^{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad m \rightarrow +\infty.$$

L'inégalité de Smith-Thom (voir l'introduction) implique immédiatement que $\text{Max } b_i(\mathbb{R}X_m^n) \leq b_*(X_m^n)$ et $\text{Max } b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n) \leq b_*(Y_{2k}^n)$. À titre d'information,

en utilisant [Da-Kho] (on pourra voir aussi [De-Kha] section 2.2), on obtient les formules suivantes

$$b_*(X_m^n) = \frac{(m-1)^{n+1} + (-1)^n}{m} + n + (-1)^{n+1}$$

$$b_*(Y_{2k}^n) = \frac{(2k-1)^{n+1} + (-1)^n}{2k} + n + 1.$$

Cela donne en particulier

$$\text{Max } b_i(\mathbb{R}X_m^n) \leq m^n + \mathcal{R}(n-1, m), \quad \text{Max } b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n) \leq 2^n k^n + \mathcal{R}(n-1, k).$$

PROPOSITION 3.1. *Il existe des nombres réels $\zeta_{i,n}$ et $\delta_{i,n}$ pour lesquels on ait les équivalences asymptotiques suivantes*

$$\text{Max } b_i(\mathbb{R}X_m^n) \sim \zeta_{i,n} \cdot m^n, \quad \text{Max } b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n) \sim \delta_{i,n} \cdot k^n$$

pour m (resp. k) $\rightarrow +\infty$.

PREUVE. On commence par démontrer l'existence de $\zeta_{i,n}$. La démonstration qui suit est une généralisation directe de celle donnée dans [B1] de l'existence de $\zeta_{i,3}$. L'inégalité de Smith-Thom implique que la suite $(\text{Max } b_i(\mathbb{R}X_m^n)/m^n)_{m \geq 1}$ est bornée, et donc admet une limite supérieure L . On montre que cette suite converge vers L de la manière suivante: pour un $\epsilon > 0$ donné, on construit avec la méthode de viro une famille d'hypersurfaces non singulières $\mathbb{R}X_m^n$ telle que $b_i(\mathbb{R}X_m^n)/m^n > L - \epsilon$ pour tout degré m suffisamment grand.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition de L , il existe un hypersurface $X_{m_0}^n$ de suffisamment grand degré m_0 telle que $b_i(\mathbb{R}X_{m_0}^n)/m_0^n > L - \epsilon/2$. On peut choisir $X_{m_0}^n$ de telle sorte que $\mathbb{R}X_{m_0}^n$ n'intersecte aucun des hyperplans de coordonnées $\{Z_i = 0\}$, autrement dit que $\mathbb{R}X_{m_0}^n$ est contenu dans le tore réel $(\mathbb{R}^*)^n$ (en particulier m_0 doit être pair).

Rappelons que dans ce papier par polytope (ou simplexe ...) on entend polytope convexe à sommets entiers. De même, par subdivision ou triangulation d'un polytope, on entendra subdivision ou triangulation à sommets entiers. Rappelons également que l'on note T_m^n le polytope de Newton d'un polynôme affine générique de degré m en n variables.

Pour tout nombre entier $p \geq 1$, on choisit une triangulation convexe de T_p^n dont tous les n -simplexes sont de volume euclidien $1/n!$ ou autrement dit qui contient p^n n -simplexes (une telle triangulation est dite primitive, ou unimodulaire, on peut voir [I-V] pour des exemples). Chacun de ces n -simplexes est l'image de T_1^n par une transformation de $AF_n(\mathbb{Z})$. Considérons maintenant la triangulation de $T_{p(m_0+n+1)}^n$ obtenue en appliquant l'homothétie de rapport m_0+n+1 à la précédente triangulation. La triangulation de $T_{p(m_0+n+1)}^n$ que l'on obtient est bien sur convexe et est constituée de p^n n -simplexes de volume euclidien $(m_0+n+1)^n/n!$. Chacun de ces n -simplexes est l'image de $T_{m_0+n+1}^n$ par une transformation de $AF_n(\mathbb{Z})$. Sachant que $(1, \dots, 1) + T_{m_0}^n$ est contenu à l'intérieur de $T_{m_0+n+1}^n$, on peut donc placer à l'intérieur de chacun des n -simplexes de la triangulation de

$T_{p(m_0+n+1)}^n$ l'image de $T_{m_0}^n$ par un élément de $AF F_n(\mathbb{Z})$. On raffine alors la triangulation de $T_{p(m_0+n+1)}^n$ en une triangulation convexe, que l'on note τ , contenant p^n images disjointes de $T_{m_0}^n$ par des éléments de $AF F_n(\mathbb{Z})$.

Les p^n images de $T_{m_0}^n$ contenues dans τ étant disjointes, on peut trouver un polynôme f de polytope de Newton $T_{p(m_0+n+1)}^n$ vérifiant les conditions suivantes.

- Si F est l'une des p^n images de $T_{m_0}^n$ mentionnée plus haut, alors f^F est l'image d'un polynôme non dégénéré définissant l'hypersurface $X_{m_0}^n$ par la transformation de $AF F_n(\mathbb{Z})$ correspondante.
- f^F est non dégénéré pour tout $F \in \tau$.

Soit f_t un polynôme de Viro tel que $f_t = f$ pour $t = 1$ et défini par une fonction ν déterminant la subdivision τ . Le théorème de Viro implique alors que pour $t > 0$ suffisamment petit l'hypersurface $\mathbb{R}X_{p(m_0+n+1)}^n$ est non singulière et homéomorphe au collage, déterminé par τ , des hypersurfaces $\{f^F = 0\} \cap (\mathbb{R}^*)^n$, $F \in \tau$. Si $F \in \tau$ est l'une des p^n images de $T_{m_0}^n$ précédentes, alors $\{f^F = 0\} \cap (\mathbb{R}^*)^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}X_{m_0}^n \cap (\mathbb{R}^*)^n$, et donc à $\mathbb{R}X_{m_0}^n$ puisque, par hypothèse, $\mathbb{R}X_{m_0}^n$ n'intersecte pas les hyperplans de coordonnées de $\mathbb{C}P^n$. On obtient donc p^n copies homéomorphes de $\mathbb{R}X_{m_0}^n$ qui sont disjointes dans $\mathbb{R}X_{p(m_0+n+1)}^n$. Par conséquent, $b_i(\mathbb{R}X_{p(m_0+n+1)}^n) \geq p^n b_i(\mathbb{R}X_{m_0}^n)$, et donc

$$(3.1) \quad \frac{b_i(\mathbb{R}X_{p(m_0+n+1)}^n)}{p^n \cdot (m_0 + n + 1)^n} \geq \frac{b_i(\mathbb{R}X_{m_0}^n)}{m_0^n} - \frac{b_i(\mathbb{R}X_{m_0}^n)}{m_0^n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1 + (n + 1)/m_0)^n}\right].$$

Sachant que $\frac{b_i(\mathbb{R}X_{m_0}^n)}{m_0^n} \geq L - \epsilon/2$, et que la suite $(\max b_i(\mathbb{R}X_m^n)/m^n)_{m \geq 1}$ est bornée, l'inégalité (3.1) implique que, quitte à choisir une surface $X_{m_0}^n$ de plus grand degré m_0 , on a

$$(3.2) \quad \frac{b_i(\mathbb{R}X_{p(m_0+n+1)}^n)}{p^n \cdot (m_0 + n + 1)^n} \geq \frac{b_i(\mathbb{R}X_{m_0}^n)}{m_0^n} - \epsilon/4.$$

Soit $p_0 \geq 1$ un nombre entier et soit $\{X_{p(m_0+n+1)}^n, p \geq p_0\}$ une famille formée d'hypersurfaces construites comme précédemment pour chaque $p \geq p_0$ et vérifiant (3.2). On complète cette famille en une famille $\mathcal{F} = \{X_m^n, m \geq p_0(m_0 + n + 1)\}$ de la manière suivante. Pour tout nombre entier m tel que $p(m_0 + n + 1) < m < (p + 1)(m_0 + n + 1)$ avec $p \geq p_0$, on construit une hypersurface X_m^n en lissifiant l'union de $X_{p(m_0+n+1)}^n$ avec $m - p(m_0 + n + 1)$ hyperplans n'intersectant pas les p^n copies homéomorphes de $\mathbb{R}X_{m_0}^n$ qui sont contenues dans $\mathbb{R}X_{p(m_0+n+1)}^n$ (on peut prendre des hyperplans proches des hyperplans de coordonnées). On a alors $b_i(\mathbb{R}X_m^n) \geq p^n \cdot b_i(\mathbb{R}X_{m_0}^n)$, et donc, sachant que $m < (p + 1)(m_0 + n + 1)$

$$(3.3) \quad \frac{b_i(\mathbb{R}X_m^n)}{m^n} \geq \frac{b_i(\mathbb{R}X_{m_0}^n)}{m_0^n} - \frac{b_i(\mathbb{R}X_{m_0}^n)}{m_0^n} \cdot \left[1 - \frac{1}{[(1 + (n + 1)/m_0)(1 + 1/p)]^n}\right].$$

Maintenant, les inégalités (3.2), (3.3) et le fait que $(\text{Max } b_i(\mathbb{R}X_m^n)/m^n)_{m \geq 1}$ soit bornée impliquent que si p_0 est suffisamment grand, alors toute hypersurface appartenant à \mathcal{F} vérifie

$$(3.4) \quad \frac{b_i(\mathbb{R}X_m^n)}{m^n} \geq \frac{b_i(\mathbb{R}X_{m_0}^n)}{m_0^n} - \epsilon/2.$$

ce qui, avec $\frac{b_i(\mathbb{R}X_{m_0}^n)}{m_0^n} \geq L - \epsilon/2$, implique que

$$\frac{b_i(\mathbb{R}X_m^n)}{m^n} \geq L - \epsilon.$$

Cela termine la démonstration de l'existence de $\zeta_{i,n}$.

L'existence de $\delta_{i,n}$ peut se montrer exactement de la même manière. Soit L la limite supérieure de la suite $\text{Max } b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n)/k^n$, et soit $\epsilon > 0$. Il existe un polynôme réel f_{2k_0} non dégénéré (de degré $2k_0$ en n variables) tel que le plan doublé réel associé $Y_{2k_0}^n = \{U^2 - \bar{f}_{2k_0}(Z)\} \subset \mathbb{C}P^{n+1}(1, k_0)$ vérifie $b_i(\mathbb{R}Y_{2k_0}^n)/k_0^n \geq L - \epsilon/2$. On peut de plus, quitte à augmenter k_0 , choisir ce polynôme de telle sorte que $\{\bar{f}_{2k_0} \geq 0\}$ n'intersecte pas les hyperplans de coordonnées de $\mathbb{R}P^n$. Pour ce faire, on peut utiliser la méthode de Viro et considérer une subdivision polyédrale convexe de $T_{2(k_0+n+1)}^n$ qui contienne le simplexe $(2, \dots, 2) + T_{2k_0}^n$ (ce dernier est situé à l'intérieur de $T_{2(k_0+n+1)}^n$), ainsi qu'un polynôme f de polytope de Newton $T_{2(k_0+n+1)}^n$ vérifiant les conditions suivantes:

- le tronqué de f sur $(2, \dots, 2) + T_{2k_0}^n$ est $(z_1 \cdots z_n)^2 f_{2k_0}(z)$,
- si F est un polytope de la subdivision entièrement contenu dans une face de $T_{2(k_0+n+1)}^n$, alors $\{f^F = 0\} \cap (\mathbb{R}^*)^n = \emptyset$,
- pour tout polytope F de la subdivision, le polynôme f^F est non dégénéré.

Si $f_{2(k_0+n+1)}$ désigne un polynôme non dégénéré obtenu par la méthode de Viro à partir de ces données (obtenu pour $t > 0$ suffisamment petit, à partir d'un polynôme de Viro f_t vérifiant $f_t = f$ pour $t = 1$ et associé à une fonction ν certifiant la convexité de la subdivision précédente), alors clairement $\{f_{2(k_0+n+1)} \geq 0\}$ n'intersecte pas les hyperplans de coordonnées de $\mathbb{R}P^n$, et de plus, si k_0 est suffisamment grand, le plan doublé associé $Y_{2(k_0+n+1)}^n = \{U^2 - \bar{f}_{2(k_0+n+1)}(Z)\} \subset \mathbb{C}P^{n+1}(1, k_0)$ vérifie $b_i(\mathbb{R}Y_{2(k_0+n+1)}^n)/(k_0 + n + 1)^n \geq L - \epsilon/2$.

Etant donné un polynôme réel f_{2k_0} non dégénéré tel que le plan doublé réel associé $Y_{2k_0}^n = \{U^2 - \bar{f}_{2k_0}(Z)\} \subset \mathbb{C}P^{n+1}(1, k_0)$ vérifie $b_i(\mathbb{R}Y_{2k_0}^n)/k_0^n \geq L - \epsilon/2$ et tel que $\{\bar{f}_{2k_0} \geq 0\}$ n'intersecte pas les hyperplans de coordonnées de $\mathbb{R}P^n$, on construit ensuite à l'aide de la méthode de Viro, pour tout entier $p \geq 1$, un polynôme $f_{2p(k_0+n+1)}$ non dégénéré de degré $2p(k_0 + n + 1)$ tel que $\{\bar{f}_{2p(k_0+n+1)} \geq 0\}$ contienne p^n copies homéomorphes et disjointes de $\{\bar{f}_{2k_0} \geq 0\}$. On termine alors de la même manière que dans la démonstration de l'existence de $\zeta_{i,n}$. \square

3.2. Estimations des $\zeta_{i,n}$ et $\delta_{i,n}$. Les valeurs exactes des $\zeta_{i,n}$ et $\delta_{i,n}$ sont connues pour les premières dimensions (on a bien sur $\zeta_{i,n} = 0$ si $i \geq n$ et $\delta_{i,n} = 0$ si $i \geq n+1$):

$$\delta_{0,0} = 2, \quad \zeta_{0,1} = \delta_{0,1} = \delta_{1,1} = 1, \quad \zeta_{0,2} = \zeta_{1,2} = \frac{1}{2}.$$

La valeur $\frac{1}{2}$ pour $\zeta_{0,2}$ et $\zeta_{1,2}$ est une conséquence du fameux théorème d'Harnack disant que le nombre de composantes connexes de la partie réelle d'une courbe algébrique réelle non singulière de degré m dans \mathbb{CP}^2 est majoré par $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ et que cette borne est exacte pour tout degré.

On connaît de plus les estimations suivantes [I3]

$$\frac{27}{16} \leq \delta_{0,2} \leq \frac{7}{4}, \quad \frac{27}{8} \leq \delta_{1,2} \leq \frac{7}{2},$$

ainsi que [B1]

$$\frac{13}{36} \leq \zeta_{0,3} \leq \frac{5}{12}, \quad \frac{13}{18} \leq \zeta_{1,3} \leq \frac{5}{6}.$$

Des bornes supérieures pour les $\zeta_{i,n}$ et $\delta_{i,n}$ sont obtenues de manière classique en utilisant les inégalités de Smith-Thom et de Comessatti-Petrovsky-Oleinik généralisées.

PROPOSITION 3.2. *Soient c_n et c'_n les coefficients dominants des nombres de Hodge centraux des X_m^n et Y_{2k}^n :*

$$h^{\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}}(X_m^n) = c_n m^n + \mathcal{R}(n-1, m), \quad n \text{ impair},$$

$$h^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(Y_{2k}^n) = c'_n k^n + \mathcal{R}(n-1, k), \quad n \text{ pair}.$$

- (1) *Si n est pair on a $\zeta_{i,n} \leq \frac{1}{2}$, sinon on a $\zeta_{\frac{n-1}{2}, n} \leq \frac{1+c_n}{2}$ et $\zeta_{i,n} \leq \frac{1+c_n}{4}$ pour $i \neq \frac{n-1}{2}$.*
- (2) *Si n est impair on a $\delta_{i,n} \leq 2^{n-1}$, sinon on a $\delta_{\frac{n}{2}, n} \leq \frac{2^n+c'_n}{2}$ et $\delta_{i,n} \leq \frac{2^n+c'_n}{4}$ pour $i \neq \frac{n}{2}$.*

PREUVE. On applique à $M = X_m^n$ et $M = Y_{2k}^n$ l'inégalité de Smith-Thom

$$b_*(\mathbb{R}M) = \sum_{i=1}^t b_i(\mathbb{R}M) \leq b_*(M),$$

où $t = \dim M$, ainsi que, lorsque t est pair, les inégalités de Comessatti-Petrovsky-Oleinik généralisées

$$2 - h^{\frac{t}{2}, \frac{t}{2}}(M) \leq \chi(\mathbb{R}M) = \sum_{i=1}^t (-1)^i b_i(\mathbb{R}M) \leq h^{\frac{t}{2}, \frac{t}{2}}(M).$$

Le résultat découle alors de $b_{t-i}(\mathbb{R}M) = b_i(\mathbb{R}M) \geq 0$, $b_*(X_m^n) = m^n + \mathcal{R}(n-1, m)$ et de $b_*(Y_{2k}^n) = 2^n k^n + \mathcal{R}(n-1, k)$. \square

Les bornes ci-dessus sont en général les meilleures bornes supérieures connues pour les $\zeta_{i,n}$ et $\delta_{i,n}$. Pour être complet, les valeurs de c_n et c'_n sont données par les formules suivantes dérivées de [Da-Kho]:

$$c_n = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n!} \sum_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^j \binom{n+1}{\frac{n+1}{2}-j} j^n,$$

$$c'_n = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n!} \left(\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}+1} (-1)^j \binom{n+2}{\frac{n}{2}+1-j} a_{j,n} + 2^n \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^j \binom{n+1}{\frac{n}{2}-j} j^n \right),$$

où $a_{j,n} = \sum_{t=1}^{2j-1} t^n$ et $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ est le coefficient binomial. En particulier, on obtient

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{2}{3}, & c_5 &= \frac{11}{20}, & c_7 &= \frac{151}{315}, \\ c'_2 &= 3, & c'_4 &= \frac{115}{12}, & c'_6 &= \frac{5887}{180}. \end{aligned}$$

On se propose maintenant d'utiliser notre construction d'hypersurfaces doublées réelles afin d'obtenir des bornes inférieures pour les $\zeta_{i,n}$ et $\delta_{i,n}$.

PROPOSITION 3.3. *Soit X une hypersurface doublée réelle non singulière de degré $2k$ dans $\mathbb{C}P^n$ dont la partie réelle est homéomorphe au collage des*

$$\mathbb{R}X_k^l(\star) \times \mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}(\star), \quad l = 1, \dots, n,$$

comme dans la proposition 2.2. Pour tout entier positif i , on a

$$b_i(\mathbb{R}X) = \left(\sum_{l=1}^n \sum_{p=0}^i b_p(\mathbb{R}X_k^l) \cdot b_{i-p}(\mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}) \right) + \mathcal{R}(n-1, k).$$

PREUVE. L'inégalité de Smith-Thom implique que, pour tout entier positif i , l'on a $b_i(\mathbb{R}X_k^l(\star)) = b_i(\mathbb{R}X_k^l) + \mathcal{R}(l-1, k)$ et $b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}(\star)) = b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}) + \mathcal{R}(n-l, k)$. En utilisant la formule de Kunneth, on obtient ensuite que $b_i(\mathbb{R}X_k^l(\star) \times \mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}(\star)) = \sum_{p=0}^i b_p(\mathbb{R}X_k^l) \cdot b_{i-p}(\mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}) + \mathcal{R}(n-1, k)$. Le collage de la proposition se faisant le long d'un nombre fini (pour n fixé) de variétés de même type mais de dimension strictement inférieures à $n-1$, l'inégalité de Smith-Thom implique que la contribution du collage à $b_i(\mathbb{R}X)$ est une fonction $\mathcal{R}(n-1, k)$. \square

PROPOSITION 3.4. *Supposons donnés pour $l = 1, \dots, n$ un polynôme f_k^l non dégénéré de polytope de Newton T_k^l et un polynôme f_{2k}^{n-l} non dégénéré de polytope de Newton T_{2k}^{n-l} . Il existe une hypersurface réelle X non singulière de degré $2(k+n+1)$ dans $\mathbb{C}P^n$ telle que, pour tout entier positif i , l'on ait*

$$b_i(\mathbb{R}X) \geq \left(\sum_{l=1}^n \sum_{p=0}^i b_p(\mathbb{R}X_k^l) \cdot b_{i-p}(\mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}) \right) + \mathcal{R}(n-1, k),$$

où X_k^l est l'hypersurface définie par f_k^l dans $\mathbb{C}P^l$ et Y_{2k}^{n-l} est le plan doublé associé à f_{2k}^{n-l} dans $\mathbb{C}P^{n-l+1}(1, k)$.

PREUVE. On pose $K = k + n + 1$ et on reprend la construction, et donc les notations, de la section 2 afin d'obtenir une hypersurface doublée de degré $2K$ dans $\mathbb{C}P^n$ (le k de la section 2 correspond donc au K ici).

Pour tout entier l compris entre 1 et n , on considère l'image du polynôme g_k^l défini par $g_k^l(z_1, \dots, z_l) = z_1 \cdots z_l f_k^l(z_1, \dots, z_l)$ par une transformation affine envoyant T_K^l sur la face F_1^l de T_K^l . On obtient ainsi une collection de polynômes \tilde{g}_k^l , $l = 1, \dots, n$, vérifiant:

- \tilde{g}_k^l et f_k^l définissent la même hypersurface $X_k^l \cap (\mathbb{R}^*)^l$ dans $(\mathbb{R}^*)^l$,
- le polytope de Newton G_k^l de \tilde{g}_k^l est contenu à l'intérieur de F_1^l .

Il existe alors une subdivision polyédrale convexe de T_K^n contenant les G_k^l pour $l = 1, \dots, n$ ainsi qu'un polynôme, de polytope de Newton T_K^n , dont le tronqué sur chacun des G_k^l coïncide avec le polynôme \tilde{g}_k^l et dont le tronqué sur tout polytope de la subdivision est un polynôme non dégénéré. En utilisant la méthode de Viro à partir de ces données, on obtient un polynôme f_K^n non dégénéré de polytope de Newton T_K^n . L'hypersurface X_K^n définie par ce polynôme vérifiera alors, pour tout entier positif i et tout entier l compris entre 1 et n

$$(3.5) \quad b_i(\mathbb{R}X_K^n \cap X(F_1^l)) \geq b_i(\mathbb{R}X_k^l) + \mathcal{R}(l-1, k),$$

puisque, pour tout entier l compris entre 1 et n , $\mathbb{R}X_K^n \cap X(F_1^l)$ contient une copie homéomorphe de $X_k^l \cap (\mathbb{R}^*)^l$.

En procédant de la même manière à partir des polynômes f_{2k}^{n-l} , on obtient un polynôme f_{2K}^n de polytope de Newton T_{2K}^n avec la propriété suivante. Si f_{2K}^{n-l} désigne le tronqué de f_{2K}^n sur F_2^{n-l} , alors, pour tout entier l compris entre 1 et n , l'ensemble $\{\bar{f}_{2K}^{n-l} \geq 0\} \subset \mathbb{R}X(F_2^{n-l})$ contient une copie homéomorphe de $\{\bar{f}_{2k}^{n-l} \geq 0\} \subset \mathbb{R}P^{n-l}$. Par suite, si Y_{2k}^{n-l} désigne le plan doublé associé à f_{2k}^{n-l} , alors, pour tout entier positif i et tout entier l compris entre 1 et n , on a

$$(3.6) \quad b_i(\mathbb{R}Y_{2K}^{n-l}) \geq b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}) + \mathcal{R}(n-l, k).$$

Il reste à appliquer la proposition 3.3 à l'hypersurface doublée X de polytope de Newton T_{2K}^n construite à partir de f_K^n et de f_{2K}^n comme dans la section 2. Le résultat final découle ensuite des inégalités 3.5 et 3.6. \square

On peut maintenant énoncer les résultats principaux de cette section.

THÉORÈME 3.1.

$$\zeta_{0,n} \geq \frac{1}{2^n - 2} \sum_{l=1}^{n-1} \zeta_{0,l} \cdot \delta_{0,n-l}.$$

PREUVE. La proposition 3.4 (pour $i = 0$) permet de montrer que

$$\text{Max } b_0(\mathbb{R}X_{2(k+n+1)}^n) \geq \sum_{l=1}^n \left(\text{Max } b_0(\mathbb{R}X_k^l) \right) \cdot \left(\text{Max } b_0(\mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}) \right) + \mathcal{R}(n-1, k).$$

En divisant chacun des membres de cette inégalité par $(2k)^n$ et en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$\zeta_{0,n} \geq \frac{1}{2^n} \sum_{l=1}^n \zeta_{0,l} \cdot \delta_{0,n-l}.$$

Il reste à remarquer que le terme donné par $l = n$ dans la somme vaut $\delta_{0,0} \cdot \zeta_{0,n} = 2 \cdot \zeta_{0,n}$. \square

Soit \bar{f} un polynôme réel homogène de degré pair en n variables définissant une hypersurface réelle X non singulière dans $\mathbb{C}P^n$. Une composante connexe de $\mathbb{R}X$ est dite positive (resp. négative) si elle borde par l'extérieur une composante connexe de $\{\bar{f} \geq 0\} \subset \mathbb{R}P^n$ (resp. $\{\bar{f} \leq 0\} \subset \mathbb{R}P^n$). Si l'on suppose que \bar{f} est négatif à l'extérieur de toute composante connexe de $\mathbb{R}X$, alors le nombre de composantes connexes positives (resp. négatives) de $\mathbb{R}X$ coïncide alors avec le nombre de composantes connexes (resp. le nombre de composantes connexes moins 1) de la partie réelle du plan doublé associé à f (resp. $-f$).

THÉORÈME 3.2.

$$\delta_{0,n} \geq \sum_{l=1}^{n-1} \zeta_{0,l} \cdot \delta_{0,n-l} + \zeta_{0,n}.$$

PREUVE. On revient à la construction de l'hypersurface doublée X de la section 2 (Proposition 2.2). On remarque que les composantes connexes de $\mathbb{R}X$ sont de deux types, celles qui proviennent de composantes de $\mathbb{R}X_{k,+}$ de bords non vides, et celles, venant par paires (une composante englobe l'autre), provenant des composantes connexes de $\mathbb{R}X_k$ contenues dans $\{\bar{f}_{2,t} > 0\}$. On remarque que les composantes connexes du premier type sont toutes de même signe, tandis que dans chaque paire de composantes connexes du deuxième type, une composante est positive et l'autre est négative. On obtient alors de la même manière que pour la proposition 3.3

$$(3.7) \quad b_0(\mathbb{R}Y_{2k}^n) = \left(\sum_{l=1}^{n-1} b_0(\mathbb{R}X_k^l) \cdot b_0(\mathbb{R}Y_{2k}^{n-l}) \right) + b_0(\mathbb{R}X_k^n) + \mathcal{R}(n-1, k),$$

si Y_{2k}^n est l'un des plans doublés au dessus de X i.e. $Y = \{U^2 \pm \bar{f}_{2k} = 0\} \subset \mathbb{C}P^{n+1}(1, k)$ si $X = \{\bar{f}_{2k} = 0\}$. Ensuite, comme dans la preuve de la proposition 3.4, on montre que dans l'égalité 3.7, quitte à remplacer $\mathbb{R}Y_{2k}^n$ par $\mathbb{R}Y_{2(k+c)}^n$ avec c ne dépendant pas de k , on peut supposer que les X_k^l et Y_{2k}^{n-l} sont arbitraires. Finalement, en prenant les maxima de chacun des nombres de betti de cette inégalité, en divisant par k^n , puis en faisant tendre

k vers $+\infty$ (voir la preuve du théorème 3.1), on obtient le résultat souhaité.

□

On se concentre maintenant sur les surfaces algébriques réelles dans $\mathbb{C}P^3$.

THÉORÈME 3.3.

$$\frac{\delta_{0,2}}{6} + \frac{1}{12} \leq \zeta_{0,3} \leq \frac{5}{12}, \quad \frac{\delta_{1,2}}{6} + \frac{1}{6} \leq \zeta_{1,3} \leq \frac{5}{6}.$$

PREUVE. Les bornes supérieures sont celles de la proposition 3.2. L'inégalité $\zeta_{0,3} \geq \frac{\delta_{0,2}}{6} + \frac{1}{12}$ s'obtient à partir du théorème 3.1 en utilisant les valeurs connues $\zeta_{0,1} = \delta_{0,1} = 1$ et $\zeta_{0,2} = 1/2$. Montrons maintenant l'inégalité $\zeta_{1,3} \geq \frac{\delta_{1,2}}{6} + \frac{1}{6}$. Pour $n = 3$ et $i = 0$, l'inégalité de la proposition 3.4 donne (après simplifications, certains nombres de Betti sont nuls pour des raisons de dimension, d'autres sont égaux deux à deux par dualité):

$$\begin{aligned} b_1(\mathbb{R}X) &\geq b_0(\mathbb{R}X_k^1) \cdot b_1(\mathbb{R}Y_{2k}^2) + 2b_0(\mathbb{R}X_k^2) \cdot b_1(\mathbb{R}Y_{2k}^1) + \\ &\quad b_1(\mathbb{R}X_k^3) \cdot b_0(\mathbb{R}Y_{2k}^0) + \mathcal{R}(2, k) \end{aligned}$$

En prenant les maxima de chacun des nombres de Betti de cette dernière inégalité, en divisant les deux membres par $(2k)^3$, puis en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient $\zeta_{1,3} \geq \frac{1}{8}(\zeta_{0,1} \cdot \delta_{1,2} + 2\zeta_{0,2} \cdot \delta_{1,1} + \zeta_{1,3} \cdot \delta_{0,0})$. En utilisant les valeurs connues des termes du membre de droite, on obtient le résultat.

□

COROLLAIRE 3.1.

$$\frac{35}{96} \leq \zeta_{0,3} \leq \frac{5}{12}, \quad \frac{35}{48} \leq \zeta_{1,3} \leq \frac{5}{6}.$$

PREUVE. C'est une conséquence du théorème précédent ainsi que des inégalités $\delta_{0,2} \geq 27/16$, $\delta_{1,2} \geq \frac{27}{8}$ qui sont prouvées dans [I3]. □

REMARQUE 3.1. Les inégalités $\frac{13}{36} \leq \zeta_{0,3}$ et $\frac{13}{18} \leq \zeta_{1,3}$ de [B1] sont obtenues de manière similaire à partir des inégalités $\delta_{0,2} \geq \frac{5}{3}$ et $\delta_{1,2} \geq \frac{10}{3}$ obtenues dans [H]. En fait, on peut extraire de [B1] (voir [B1], remarque 2, section 5) les inégalités $\zeta_{0,3} \geq \frac{T\delta_{0,2}}{6} + \frac{1}{12}$ et $\zeta_{1,3} \geq \frac{T\delta_{1,2}}{6} + \frac{1}{6}$ où $T\delta_{0,2}$ et $T\delta_{1,2}$ sont définis comme $\delta_{0,2}$ et $\delta_{1,2}$ mais en se restreignant aux T -courbes (voir la sous-section 3.3 pour une définition précise).

On présente maintenant un tableau recensant les bornes inférieures pour les $\zeta_{0,n}$ et $\delta_{0,n}$, $n \leq 7$, obtenues récursivement grâce au théorème 3.2 à partir des estimations connues pour $n \leq 2$. Les bornes supérieures sont celles de la proposition 3.2 sauf pour les $\delta_{0,n}$ avec n impair pour lesquels on a utilisé l'inégalité $\delta_{0,n} \leq 2^n \zeta_{0,n}$ (voir la remarque 3.2 plus bas) alliée avec la borne supérieure pour $\zeta_{0,n}$ de la proposition 3.2.

n	$\zeta_{0,n}$		$\delta_{0,n}$	
	inf	sup	inf	sup
1	1	1	1	1
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{7}{4}$
3	$\frac{35}{96}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{245}{96}$	$\frac{10}{3}$
4	$\frac{361}{1344} \sim 0,27$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1805}{448} \sim 4,03$	$\frac{307}{48} \sim 6,4$
5	$\frac{22181}{107520} \sim 0,2$	$\frac{31}{80}$	$\frac{687611}{107520} \sim 6,4$	$\frac{62}{5}$
6	$\frac{1612753}{9999360} \sim 0,16$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1612753}{158720} \sim 10,16$	$\frac{17407}{720} \sim 24,17$
7	$\frac{854473649}{6719569920} \sim 0,127$	$\frac{233}{630} \sim 0,37$	$\frac{108518153423}{6719569920} \sim 16,15$	$\frac{14912}{315} \sim 47,34$

TABLEAU 1.

REMARQUE 3.2. On a

$$2^{n-1}\zeta_{0,n} \leq \delta_{0,n} \leq 2^n \zeta_{0,n}$$

car une composante connexe d'une hypersurface projective $\mathbb{R}X_{2k}^n = \{\bar{f}_{2k} = 0\} \subset \mathbb{R}P^n$ est soit positive soit négative, ce qui implique que $\frac{1}{2}b_0(\mathbb{R}X_{2k}^n) \leq b_0(\mathbb{R}Y_{2k}^n) \leq b_0(\mathbb{R}X_{2k}^n)$ pour l'un ou l'autre des plans doublés $Y_{2k}^n = \{U^2 \pm \bar{f}_{2k}(Z) = 0\}$.

On peut trouver une borne moins bonne que celle du théorème 3.2, mais beaucoup plus facilement calculable.

PROPOSITION 3.5.

$$\zeta_{0,n} \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

PREUVE. On obtient le résultat par récurrence à partir des inégalités $\zeta_{0,n} \geq \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{l=1}^{n-1} \zeta_{0,l} \cdot \delta_{0,n-l}$ et $\delta_{0,n} \geq 2^{n-1} \zeta_{0,n}$ du théorème 3.2 et de la remarque 3.2. \square

3.3. Cas des T -hypersurfaces. Un T -polynôme est un polynôme de Viro f_t pour lequel la subdivision polyédrale (de son polytope de Newton) associée est une triangulation dont l'ensemble des sommets correspond exactement à l'ensemble des monômes de f_t . Une T -hypersurface est une hypersurface définie, pour $t > 0$ suffisamment petit, par un T -polynôme. Notons que génériquement un polynôme de Viro est un T -polynôme. Le type topologique de la partie réelle d'une T -hypersurface définie par un T -polynôme f_t ne dépend que des signes (et donc pas de la valeur absolue) des coefficients de f_t et de la triangulation associée. La procédure permettant d'obtenir le type topologique de la partie réelle d'une T -hypersurface à partir de la triangulation associée et de la distribution de signes aux sommets de cette triangulation est appelée patchwork combinatoire ou T -construction (pour une description précise du patchwork combinatoire, voir, par exemple, [I-S, I-V]). La famille des T -hypersurfaces de degré et dimension donnés est assez rigide, (on peut noter, par exemple, que si f est un T -polynôme affine en n variables et a est un changement de coordonnées affines, alors en général, le polynôme $f \circ a$ n'est pas un T -polynôme) et l'on doit s'attendre à ce qu'elle soit strictement contenue dans la famille correspondante d'hypersurfaces algébriques réelles. Itenberg [I1] a montré l'existence de courbes algébriques réelles planes qui ne sont pas des T -courbes. Plus récemment, Itenberg et Shustin [I-S] ont montré l'existence d'hypersurfaces algébriques réelles dans \mathbb{CP}^n qui ne sont pas des T -hypersurfaces pour tout $n \geq 7$ et tout m suffisamment grand. Le but ici est d'obtenir le résultat similaire pour des dimensions inférieures.

On commence par remarquer que la proposition 3.1 a son équivalent direct pour les T -hypersurfaces.

Soit i un entier positif. On note, respectivement,

$$TMax\ b_i(\mathbb{R}X_m^n) \quad \text{et} \quad TMax\ b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n)$$

la valeur maximale des nombres de Betti $b_i(\mathbb{R}X_m^n)$ prise sur l'ensemble des T -hypersurfaces X_m^n de degré m dans \mathbb{CP}^n pour m et n fixés, et la valeur maximale des nombres de Betti $b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n)$ prise sur l'ensemble des plans doublés $Y_{2k}^n = \{U^2 - \bar{f}_{2k}(Z) = 0\} \subset \mathbb{CP}^{n+1}(1, k)$ associés à des T -polynômes f_{2k} pour k et n fixés.

PROPOSITION 3.6. *Il existe des nombres réels $T\zeta_{i,n}$ et $T\delta_{i,n}$ pour lesquels on ait les équivalences asymptotiques suivantes*

$$TMax\ b_i(\mathbb{R}X_m^n) \sim T\zeta_{i,n} \cdot m^n, \quad TMax\ b_i(\mathbb{R}Y_{2k}^n) \sim T\delta_{i,n} \cdot k^n$$

pour m (resp. k) $\rightarrow +\infty$.

PREUVE. On montre exactement comme dans la preuve de la proposition 3.1 que la suite $TMax\ b_i(\mathbb{R}X_m^n)/m^n$ converge vers sa limite supérieure L . On se contente d'indiquer ici les modifications à apporter de manière à ce que les hypersurfaces construites dans la preuve de la proposition 3.1 soient des T -hypersurfaces vérifiant les mêmes propriétés.

Soit $X_{m_0}^n$ une T -hypersurface telle que $b_i(\mathbb{R}X_{m_0}^n)/m_0^n > L - \epsilon/2$. On note τ la triangulation convexe de $T_{m_0}^n$ et D_τ la distribution de signes aux sommets de τ qui sont associées à $X_{m_0}^n$.

Par la suite, l'image de τ par une transformation affine $\Delta \in \text{AFF}_n(\mathbb{Z})$ sera la triangulation convexe $\Delta(\tau)$ de $\Delta(T_{m_0}^n)$ constituée des $\Delta(\gamma)$ pour $\gamma \in \tau$ et l'image de D_τ par Δ sera la distribution de signes $\Delta(D_\tau)$ aux sommets de $\Delta(\tau)$ attribuant à $\Delta(w)$ le signe attribué par D_τ à w .

On peut supposer, quitte à augmenter m_0 , que la T -hypersurface $X_{m_0}^n$ n'intersecte pas les hyperplans de coordonnées de $\mathbb{R}P^n$. En effet, soit $\Delta \in \text{AFF}_n(\mathbb{Z})$ la translation par $(1, \dots, 1)$ et soit $c = 1$ ou 2 tel que $m_0 + n + c$ est pair. On étend $\Delta(\tau)$ en une triangulation convexe $\tilde{\tau}$ de $T_{m_0+n+c}^n$ de telle sorte que chacun des sommets de $\tilde{\tau}$ situé sur le bord de $T_{m_0+n+c}^n$ appartienne à $(2\mathbb{Z})^n$, puis on étend $\Delta(D_\tau)$ en une distribution de signes $D_{\tilde{\tau}}$ de telle sorte que $D_{\tilde{\tau}}$ attribue le même signe à tous les sommets situés sur le bord de $T_{m_0+n+c}^n$. Clairement, si $X_{m_0+n+c}^n$ est une T -hypersurface associée à $\tilde{\tau}$ et $D(\tilde{\tau})$, alors $X_{m_0+n+c}^n$ n'intersecte pas les hyperplans de coordonnées de $\mathbb{R}P^n$ et vérifie $b_i(\mathbb{R}X_{m_0+n+c}^n)/m_0^n > L - \epsilon/2$ pour m_0 suffisamment grand.

Pour construire les hypersurfaces $X_{p(m_0+n+1)}^n$ comme des T -hypersurfaces, on utilise une triangulation convexe de $T_{p(m_0+n+1)}^n$ ainsi qu'une distribution de signes qui étendent les p^n images correspondantes de τ et de $D(\tau)$.

Finalement, pour compléter la famille de T -hypersurfaces $X_{p(m_0+n+1)}^n$, $p \geq p_0$, en une famille de T -hypersurfaces $\mathcal{F} = \{X_m^n, m \geq p_0(m_0 + n + 1)\}$, on considère, pour tout entier m tel que $p(m_0 + n + 1) < m < (p + 1)(m_0 + n + 1)$ avec $p \geq p_0$, une triangulation convexe de T_m^n et une distribution de signes à ses sommets qui étendent la triangulation convexe de $T_{p(m_0+n+1)}^n$ et distribution de signes correspondante.

La preuve de l'existence de $T\delta_{i,n}$ s'obtient à partir de la preuve de l'existence de $\delta_{i,n}$ par les modifications similaires. \square

On a bien sur $T\zeta_{i,n} \leq h_{i,n}$ et $T\delta_{i,n} \leq d_{i,n}$. Pour les petites dimensions, on a en fait des égalités:

$$\delta_{0,0} = T\delta_{0,0} = 2, \quad \zeta_{0,1} = \delta_{0,1} = \delta_{1,1} = T\zeta_{0,1} = T\delta_{0,1} = T\delta_{1,1} = 1,$$

$$\zeta_{0,2} = \zeta_{1,2} = T\zeta_{0,2} = T\zeta_{1,2} = \frac{1}{2} \quad (\text{voir, par exemple, [I1]}).$$

On connaît de plus les estimations suivantes [I3]

$$T\delta_{0,2} \geq \frac{27}{16}, \quad T\delta_{1,2} \geq \frac{27}{8}$$

ainsi que

$$\frac{1}{4} \leq T\zeta_{0,3} \leq \frac{16}{39}, \quad \frac{97}{144} \leq T\zeta_{1,3} \leq \frac{7}{9}.$$

Les bornes inférieures pour $T\zeta_{0,3}$ et $T\zeta_{1,3}$ proviennent de [B3] et [I2], respectivement, les bornes supérieures proviennent d'un article récent [I-S] d'Itenberg et Shustin, duquel est extrait la proposition suivante.

PROPOSITION 3.7 ([I-S]). *Pour tout $n \geq 4$, on a*

$$T\zeta_{0,n} \leq \frac{2^{n-1}}{n!}.$$

Comme conséquence de cette proposition et de notre construction, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 3.4. *Pour tout $n \geq 5$, on a*

$$T\zeta_{0,n} < \zeta_{0,n}.$$

En particulier, pour tout $n \geq 5$ et tout degré m suffisamment grand, il existe des hypersurfaces algébriques réelles X_m^n de degré m dans \mathbb{CP}^n qui ne sont pas des T -hypersurfaces.

PREUVE. On obtient $n \geq 5 \Rightarrow \zeta_{0,n} > \frac{2^{n-1}}{n!}$ grace au lemme 3.5 pour $n \geq 7$ et du tableau 1. pour $n = 5$ et 6. Il reste à appliquer la proposition 3.7. \square

Remarques conclusives.

1. Une variété algébrique réelle lisse X est appelée *M-variété* si elle rend exacte l'inégalité de Smith-Thom i.e. si $b_*(\mathbb{R}X) = b_*(X)$. Il existe des M-hypersurfaces X_m^n pour tout m et n [I-V]. Une famille d'hypersurfaces X_m^n est dite *asymptotiquement maximale* si $b_*(\mathbb{R}X_m^n) = b_*(X_m^n) + \mathcal{R}(n-1, m) = m^n + \mathcal{R}(n-1, m)$. On remarque que la famille des hypersurfaces doublées construites dans la section 2 est asymptotiquement maximale si c'est la cas pour chacune des familles d'hypersurfaces X_k^l et X_{2k}^{n-l} .

2. On peut montrer des résultats du même type que la proposition 3.1 pour d'autres invariants topologiques que les nombres de Betti individuels. Par exemple, en reprenant la preuve de la proposition 3.1, on montre aisément l'existence d'un réel χ_n tel que $\text{Max } \chi(\mathbb{R}X_m^n) \sim \chi_n \cdot m^n$.

References

- [B1] F. Bihan, *Asymptotic behaviour of Betti numbers of real algebraic surfaces*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 227-244.
- [B2] F. Bihan, *Viro method for the construction of real complete intersections*, Advances in Mathematics **169** (2002), 177-182.
- [B3] F. Bihan, *Constructions combinatoires de surfaces algébriques réelles*, thèse, université de Rennes. 1998.
- [Da-Kho] V. I. Danilov, A. G. Khovansky, *Newton polyhedra and an algorithm for computing Hodge-Deligne numbers*, Izv. Acad. Nauk SSSR **50** (1986), (Russian), English transl. Math. USSR Izvestiya **29:2** (1987), 279-298.
- [De-Kha] A. Degtyarev, V. Kharlamov, *Topological properties of real algebraic varieties: du côté de chez Rokhlin*, Russian Mathematical Surveys, Vol. 55, No 4, 2000.
- [G-K-Z] Gelfand, I. M. Kapranov, M. M. Zelevinski, *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Birkhauser, Boston, 1994.
- [H] B. Haas, *Les multilucarnes: nouveaux contre-exemples à la conjecture de Ragsdale*, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. (1995), 1507-1512.

- [H-R-S] B. Huber, J. Rambau, F. Santos *The Cayley trick, lifting subdivisions and the Bohné-Dress theorem on zonotopal tilings*, J. Eur. Math. Soc 2, 179-198 (2000).
- [I1] I. Itenberg, *Counter-examples to Ragsdale Conjecture and T-curves*, Cont. Math. (Proceedings, Michigan 1993) **182** (1995), 55-72.
- [I2] I. Itenberg, *Topology of real algebraic T-surfaces*, Revista Mat. de la Univ. Compl. de Madrid, **10** (1997), 131-152.
- [I3] I. Itenberg, *On the number of even ovals of a nonsingular curve of an even degree in $\mathbb{R}P^2$* , Amer. Math. Soc. Transl. ser. 2, vol 202 (2001), 121-129.
- [I-V] I. Itenberg, O. Viro, *maximal real algebraic hypersurfaces of projective space*, en préparation.
- [I-S] I. Itenberg, E. Shustin, *Critical points of real polynomials and topology of real algebraic T-surfaces*, à paraître dans Geom. Dedicata.
- [R] J.-J. Risler, *Construction d'hypersurfaces réelles [d'après Viro]*, Séminaire N. Bourbaki, no. 763, vol. 1992-93.
- [S1] B. Sturmfels, *Viro's theorem for complete intersections*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (4) **21** (1994), no. 3, 377-386.
- [S2] B. Sturmfels, *On the Newton polytope of the Resultant*, Journal of Algebraic Combinatorics **3** (1994), 207-236.
- [V1] O. Viro, *Construction of multicomponent real algebraic surfaces*, Sov. Math. Doklady **20** (1979), 991-995.
- [V2] O. Viro, *Gluing of algebraic hypersurfaces, smoothing of singularities and construction of curves*, Proc. Leningrad Int. Topological Conf. (Leningrad, Aug. 1983), Nauka, Leningrad, 1983, 149-197 (in Russian).
- [V3] O. Viro, *Gluing of plane algebraic curves and construction of curves of degree 6 and 7*. Lect. Notes Math., vol 1060, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984, 187-200.
- [V4] O. Viro, *Real algebraic plane curves: constructions with controlled topology*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 1059-1134.

E-mail address: Frederic.Bihan@math.unil.ch